2数の引き算および足し算に関する構造の考察
－課題学習として－

高橋（たかはし）　敏雄（としお）

§1. はじめに

皆さんは，次のような問題を解かれたことがあるでしょうか。すなわち

$$
\begin{array}{rccccc}
 & \square & \square & \square & \square & \square \\
-) & \square & \square & \square & \square & \square \\
\hline
 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7
\end{array}
$$

この引き算で，10個の□の中に0から9までの整数を重複させないで記入しなさい。

という問題です。この問題を一般に解くと各人各様，概ね試行錯誤を繰り返しつつも，解答に到達するようです。私もこの問題を高校2年次に友人間で競い合いながら取り組んだことがあります。この2数の引き算の取り組みの中で私は，偶然にもこの引き算に面白い構造があることを見つけました。当初は中途半端でしたが，その後いくつかのアイデアを出し，きちんと整理をしたのが本稿です。

§2. 2数の引き算に関する構造（I）

4つの性質 T_k とその配列T－列について述べます。

実はこの引き算について，次のようなルールとして事務的に計算します。この点について，一々考察をしようとすら考えないのが普通です。例えば，

$$
\begin{array}{rr}
 & 9405 \\
-) & 6721 \\
\hline
 & 2684
\end{array}
\qquad \cdots\cdots(1)
$$

この引き算には次のような，4つの規則計算が行われています。引き算の性質を中心に各桁を見てみましょう。

(i) 性質 T_1
上の位から10貰う
下の位へ1とられる

$$
\begin{array}{rr}
 & 4 \\
-) & 7 \\
\hline
 & 6
\end{array}
$$

(ii) 性質 T_2
上の位から10貰う
下の位にとられず

$$
\begin{array}{rr}
 & 0 \\
-) & 2 \\
\hline
 & 8
\end{array}
$$

(iii) 性質 T_3
上の位から貰わず
下の位へ1とられる

$$
\begin{array}{rr}
 & 9 \\
-) & 6 \\
\hline
 & 2
\end{array}
$$

(iv) 性質 T_4
上の位から貰わず
下の位にとられず

$$
\begin{array}{rr}
 & 5 \\
-) & 1 \\
\hline
 & 4
\end{array}
$$

したがって，先ほどの例の(1)の引き算の形は，$T_3T_1T_2T_4$ ということになります。

さて，この4つの性質には前後の関係のあることがわかります。

その関係を ≪ で表すと次のようになります。

① $T_1 \ll T_1,\ T_2$　② $T_2 \ll T_3,\ T_4$
③ $T_3 \ll T_1,\ T_2$　④ $T_4 \ll T_3,\ T_4$

または

① $T_1,\ T_3 \ll T_1$　② $T_1,\ T_3 \ll T_2$
③ $T_2,\ T_4 \ll T_3$　④ $T_2,\ T_4 \ll T_4$

このとき

・最左列の文字は上の位から貰わないのであるから　$T_3,\ T_4$
・最右列の文字は下の位からとられないから　$T_2,\ T_4$

になります。したがって，例えば，3桁の引き算のパターンは次のようになります。

- T_3
  - T_1
    - T_1 ×
    - T_2 ○　$T_3T_1T_2$
  - T_2
    - T_3 ×
    - T_4 ○　$T_3T_2T_4$
- T_4
  - T_3
    - T_1 ×
    - T_2 ○　$T_4T_3T_2$
  - T_4
    - T_3 ×
    - T_4 ○　$T_4T_4T_4$

すなわち $T_3T_1T_2$，$T_3T_2T_4$，$T_4T_3T_2$，$T_4T_4T_4$ の $2^{3-1}=4$ 通りということになります。この引き算の配列をT－列ということにします。一般に，n 桁の数のT－列の個数は，$2^n \div 2 = 2^{n-1}$ 個になります。

§3. 2数の引き算に関する構造 (Ⅱ)

T－表について述べます。

§2の(1)の例の引き算で各桁を $\binom{9}{6}\in[T_3,\ 2]$, $\binom{4}{7}\in[T_1,\ 6]$, $\binom{0}{2}\in[T_2,\ 8]$, $\binom{5}{1}\in[T_4,\ 4]$ という記号で分解します。ある桁の引き算が，性質 T_k で

$$\begin{array}{r} i \\ -)\ j \\ \hline n \end{array}$$

T－表

T_k		$\binom{i}{j}$		
A		n		

であるとします。この引き算を，集合

$[T_k,\ n]\ni\binom{i}{j}$

ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$n,\ i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$

で記述することにします。ここで $\binom{i}{j}$ は集合 $[T_k,\ n]$ の要素で，i，j はこの要素の成分になります。A は引き算の各桁の答。そしてこの表をT－表といいます。

この記号を使って下記にT－表を作成してみます。その前に，§2の(1)の例をT－表に落としてみることにします。

T_1							$\binom{4}{7}$			
T_2									$\binom{0}{2}$	
T_3			$\binom{9}{6}$							
T_4					$\binom{5}{1}$					
A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

と書くことができます。適当な引き算をたくさん行うことによって，上の表は徐々に完成されていきます。そして，どのような引き算もこの表の中で行われることになります。この表の $[T,\ *]$ の要素には，いくつかの規則性がありますが，ここでは省略します。さて，T－表を下に全部記入してみます。ただし，

$[T_1,\ 6]=\left\{\binom{0}{3},\ \binom{1}{4},\ \binom{2}{5},\ \binom{3}{6},\ \binom{4}{7},\ \binom{5}{8},\ \binom{6}{9}\right\}$

は $\binom{0123456}{3456789}$ と略記することにします。

T_1	$\binom{0}{9}$	$\binom{01}{89}$	$\binom{012}{789}$
T_2	ϕ	$\binom{0}{9}$	$\binom{01}{89}$
T_3	$\binom{123456789}{012345678}$	$\binom{23456789}{01234567}$	$\binom{3456789}{0123456}$
T_4	$\binom{0123456789}{0123456789}$	$\binom{123456789}{012345678}$	$\binom{23456789}{01234567}$
A	0	1	2

T_1	$\binom{0123}{6789}$	$\binom{01234}{56789}$	$\binom{012345}{456789}$	$\binom{0123456}{3456789}$
T_2	$\binom{012}{789}$	$\binom{0123}{6789}$	$\binom{01234}{56789}$	$\binom{012345}{456789}$
T_3	$\binom{456789}{012345}$	$\binom{56789}{01234}$	$\binom{6789}{0123}$	$\binom{789}{012}$
T_4	$\binom{3456789}{0123456}$	$\binom{456789}{012345}$	$\binom{56789}{01234}$	$\binom{6789}{0123}$
A	3	4	5	6

T_1	$\binom{01234567}{23456789}$	$\binom{012345678}{123456789}$	$\binom{0123456789}{0123456789}$
T_2	$\binom{0123456}{3456789}$	$\binom{01234567}{23456789}$	$\binom{012345678}{123456789}$
T_3	$\binom{89}{01}$	$\binom{9}{0}$	ϕ
T_4	$\binom{789}{012}$	$\binom{89}{01}$	$\binom{9}{0}$
A	7	8	9

表の各要素の並びには，規則性のあることがわかります。$A=k$ $(k=0\sim9)$ の T_1，T_2，T_3，T_4 の要素の個数の和は，同じで20個あります。

§4. 問題の解の発見

今までの知識を使って冒頭の問題

$$\begin{array}{rccccc} & \square & \square & \square & \square & \square \\ -) & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}$$

$\square$ の中に0から9までの数を重複しないで記入せよ，を解いてみよう。

まず，$A=7$ のT－列とT－表を記します。

$A=7$ の5桁のT－列は，$2^{5-1}=2^4=16$ 個あります。§2の3桁の樹形図の要領でT－列を並べてみます。

$A=7$ のT−列

$T_3T_1T_1T_1T_2$　$T_4T_3T_1T_1T_2$
$T_3T_1T_1T_2T_4$　$T_4T_3T_1T_2T_4$
$T_3T_1T_2T_3T_2$　$T_4T_3T_2T_3T_2$
$T_3T_1T_2T_4T_4$　$T_4T_3T_2T_4T_4$
$T_3T_2T_3T_1T_2$　$T_4T_4T_3T_1T_2$
$T_3T_2T_3T_2T_4$　$T_4T_4T_3T_2T_4$
$T_3T_2T_4T_3T_2$　$T_4T_4T_4T_3T_2$
$T_3T_2T_4T_4T_4$　$T_4T_4T_4T_4T_4$

$A=7$ のT−表

T_1	$\begin{pmatrix}01234567\\23456789\end{pmatrix}$
T_2	$\begin{pmatrix}0123456\\3456789\end{pmatrix}$
T_3	$\begin{pmatrix}89\\01\end{pmatrix}$
T_4	$\begin{pmatrix}789\\012\end{pmatrix}$
A	7

$T_3=\begin{pmatrix}89\\01\end{pmatrix}$，$T_4=\begin{pmatrix}789\\012\end{pmatrix}$ を考えます。

(i)　T−列に T_3 が2個ある場合，すでに

$$\begin{array}{r}8\\-)\ 0\\\hline 7\end{array}\qquad\begin{array}{r}9\\-)\ 1\\\hline 7\end{array}$$

の形になっているから，T_4 の要素はすでに使われていて重複しないものはない。
したがって，T_3 の列が2個以上で T_4 の列が1個以上のT−列は削除します。
同じように考えて，T_4 の列が2個以上で T_3 の列が1個以上のT−列は削除します。
　このときのT−列は

$T_3T_1T_1T_1T_2$，$T_3T_1T_1T_2T_4$，$T_3T_1T_2T_3T_2$，
$T_3T_2T_3T_1T_2$，$T_4T_3T_1T_1T_2$

の5個になります。

(ii)　T_3 が2個，T_2 が2個の場合，

$T_3=\begin{pmatrix}89\\01\end{pmatrix}$，$T_2=\begin{pmatrix}0123456\\3456789\end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}\in T_3$

であるから，この成分を取り去った T_2 の要素は
$\begin{pmatrix}234\\567\end{pmatrix}\in T_2$ で，これから2つの要素 $\begin{pmatrix}23\\56\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}24\\57\end{pmatrix}$，
$\begin{pmatrix}34\\67\end{pmatrix}\in T_2$ をとります。このとき $T_1\ni\begin{pmatrix}2345\\4567\end{pmatrix}$ ですから，T_2 の3つの要素をもってしても，T_1 の4つの要素のどれをとってもダブってしまい不適になります。
よって，残りのT−列は

$T_3T_1T_1T_1T_2$，$T_3T_1T_1T_2T_4$，$T_4T_3T_1T_1T_2$

この3つに絞られます。

(iii)　$T_3T_1T_1T_2T_4$，$T_4T_3T_1T_1T_2$ について

$T_3=\begin{pmatrix}89\\01\end{pmatrix}$，$T_4=\begin{pmatrix}789\\012\end{pmatrix}$，$T_2=\begin{pmatrix}0123456\\3456789\end{pmatrix}$，
$T_1=\begin{pmatrix}01234567\\23456789\end{pmatrix}$ であるから $T_3\ni\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ のとき

$T_4\ni\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$，$T_2\ni\begin{pmatrix}134\\467\end{pmatrix}$，$T_1\ni\begin{pmatrix}1345\\3567\end{pmatrix}$

さらに $T_2\ni\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ とすると，$T_1\ni\begin{pmatrix}35\\57\end{pmatrix}$，$T_1$ の2つの要素は成分が5でダブっているので，不適になります。$T_2\ni\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ とすると，$T_1\ni\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ となり，T_1 のT−列が2個であるから不適になります。
$T_2\ni\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ とすると，$T_1\ni\begin{pmatrix}13\\35\end{pmatrix}$ やはり2つの要素の成分がダブり不適になります。
では，$T_3\ni\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}$ のとき　$T_4\ni\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$，$T_2\ni\begin{pmatrix}235\\568\end{pmatrix}$，
$T_1\ni\begin{pmatrix}2346\\4568\end{pmatrix}$　この場合も不適になります。
最後に残ったのは

(iv)　$T_3T_1T_1T_1T_2$ について

$T_3=\begin{pmatrix}89\\01\end{pmatrix}$，$T_2=\begin{pmatrix}0123456\\3456789\end{pmatrix}$，$T_1=\begin{pmatrix}01234567\\23456789\end{pmatrix}$

であるから
$T_3\ni\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ のとき　$T_2\ni\begin{pmatrix}12346\\45679\end{pmatrix}$，$T_1\ni\begin{pmatrix}123457\\345679\end{pmatrix}$
次に $T_2\ni\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ とすると，$T_1\ni\begin{pmatrix}357\\579\end{pmatrix}$
これから T_1 の3つの要素はダブりがあり不適。
$T_2\ni\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ とすると，$T_1\ni\begin{pmatrix}147\\369\end{pmatrix}$ この要素にはダブりがないから適する。よって $T_3T_1T_1T_1T_2$ にしたがって，要素を並べると

$$\begin{array}{r}81472\\-)\ 03695\\\hline 77777\end{array}$$　これはO.K.です。

$T_2\ni\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ とすると，$T_1\ni\begin{pmatrix}257\\479\end{pmatrix}$　この要素にはダブりがあるから不適。
$T_2\ni\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ とすると，$T_1\ni\begin{pmatrix}13\\35\end{pmatrix}$ となり，要素が3個なければならないので不適。
$T_2\ni\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ とすると，$T_1\ni\begin{pmatrix}1235\\3457\end{pmatrix}$ となり，
$T_1\ni\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$
よって

$$\begin{array}{r}82156\\-)\ 04379\\\hline 77777\end{array}$$

次に $T_3 \ni \begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}$ のとき，$T_2 \ni \begin{pmatrix}02345\\35678\end{pmatrix}$,

$T_1 \ni \begin{pmatrix}023456\\245678\end{pmatrix}$ より $T_2 \ni \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ とすると，

$T_1 \ni \begin{pmatrix}2456\\4678\end{pmatrix}$ よりダブらない３つの要素は，

$T_1 \ni \begin{pmatrix}256\\478\end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{array}{r} 92560 \\ -)\ 14783 \\ \hline 77777 \end{array}$$

$T_2 \ni \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ とすると，$T_1 \ni \begin{pmatrix}346\\568\end{pmatrix}$ より不適。

$T_2 \ni \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ とすると，$T_1 \ni \begin{pmatrix}025\\247\end{pmatrix}$ より不適。

$T_2 \ni \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ とすると，$T_1 \ni \begin{pmatrix}036\\258\end{pmatrix}$ これは適する。

よって

$$\begin{array}{r} 90364 \\ -)\ 12587 \\ \hline 77777 \end{array}$$

$T_2 \ni \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$ とすると，$T_1 \ni \begin{pmatrix}024\\246\end{pmatrix}$ これは不適。

以上の考察から，この問題の解答は

$$\begin{array}{r} 81472 \\ -)\ 03695 \\ \hline 77777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 82156 \\ -)\ 04379 \\ \hline 77777 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 92560 \\ -)\ 14783 \\ \hline 77777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 90364 \\ -)\ 12587 \\ \hline 77777 \end{array}$$

ということになります。

なお，この方法でこの問題を $A=0\sim 9$ まで拡大して解いていきますと，$A=1\sim 7$ は解があり，$A=0$，8，9 の場合に解のないことが証明できます。

§5. ２数の足し算に関する構造

差Ｔと和Ｓの関係について述べます。

今度は引き算と同じように足し算について考えてみます。次の足し算

$$\begin{array}{r} 2684 \\ +)\ 6721 \\ \hline 9405 \end{array} \qquad \cdots\cdots(2)$$

を考えます。

(i) 性質 S_1
上位へ１与え
下位から１貰う

$$\begin{array}{r} 6 \\ +)\ 7 \\ \hline 4 \end{array}$$

(ii) 性質 S_2
上位へ１与え
下位から貰わない

$$\begin{array}{r} 8 \\ +)\ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

(iii) 性質 S_3
上位へ与えず
下位から１貰う

$$\begin{array}{r} 2 \\ +)\ 6 \\ \hline 9 \end{array}$$

(iv) 性質 S_4
上位へ与えず
下位から貰わない

$$\begin{array}{r} 4 \\ +)\ 1 \\ \hline 5 \end{array}$$

この列の配列は，$S_3S_1S_2S_4$ になります。この列をＳ－列ということにします。

したがって，差の(1)と和の(2)の配列を比較しますと

$$T_3T_1T_2T_4 \Leftrightarrow S_3S_1S_2S_4$$

の成り立つのがわかります。そして，このＴとＳの列の添数が互いに対応していることに気づきます。

このことは一般に成り立つことが証明できます。したがって，Ｓ－列を作成する場合は，Ｔ－列の配列で，ＴをＳに変換すればよいことになります。

Ｓの前後関係を引き算と同様に ≪ で表すと次のようになります。

① $S_1 \ll S_1, S_2$　② $S_2 \ll S_3, S_4$

③ $S_3 \ll S_1, S_2$　④ $S_4 \ll S_3, S_4$

または

① $S_1, S_3 \ll S_1$　② $S_1, S_3 \ll S_2$

③ $S_2, S_4 \ll S_3$　④ $S_2, S_4 \ll S_4$

このとき

・最左列の文字は上の位へ与えないから　S_3，S_4

・最右列の文字は下の位から貰わないから　S_2，S_4

になります。

さらに，次のＴ，Ｓの関係が成り立ちます。

$$\begin{pmatrix}n\\l\end{pmatrix} \in [T_k,\ m] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}m\\l\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}l\\m\end{pmatrix} \in [S_k,\ n]$$

Ｔ－表

T_k		$\begin{pmatrix}n\\l\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}$	
A		m	l	

⇔

Ｓ－表

S_k		$\begin{pmatrix}\cdots m \cdots l \cdots\\ \cdots l \cdots m \cdots\end{pmatrix}$		
A		n		

この関係を使って，T－表からS－表を作成することができます。次にS－表を作成します。

S_1	$\binom{0123456789}{9876543210}$	$\binom{123456789}{987654321}$	$\binom{23456789}{98765432}$
S_2	$\binom{123456789}{987654321}$	$\binom{23456789}{98765432}$	$\binom{3456789}{9876543}$
S_3	ϕ	$\binom{0}{0}$	$\binom{01}{10}$
S_4	$\binom{0}{0}$	$\binom{01}{10}$	$\binom{012}{210}$
A	0	1	2

S_1	$\binom{3456789}{9876543}$	$\binom{456789}{987654}$	$\binom{56789}{98765}$	$\binom{6789}{9876}$
S_2	$\binom{456789}{987654}$	$\binom{56789}{98765}$	$\binom{6789}{9876}$	$\binom{789}{987}$
S_3	$\binom{012}{210}$	$\binom{0123}{3210}$	$\binom{01234}{43210}$	$\binom{012345}{543210}$
S_4	$\binom{0123}{3210}$	$\binom{01234}{43210}$	$\binom{012345}{543210}$	$\binom{0123456}{6543210}$
A	3	4	5	6

S_1	$\binom{789}{987}$	$\binom{89}{98}$	$\binom{9}{9}$
S_2	$\binom{89}{98}$	$\binom{9}{9}$	ϕ
S_3	$\binom{0123456}{6543210}$	$\binom{01234567}{76543210}$	$\binom{012345678}{876543210}$
S_4	$\binom{01234567}{76543210}$	$\binom{012345678}{876543210}$	$\binom{0123456789}{9876543210}$
A	7	8	9

この問題は，p 進法の足し算・引き算についても継続して作成が可能です。

この足し算の性質等が，何に応用できるかわかりませんが，とりあえずここに紹介だけをさせていただきました。

※　$\binom{n}{*}\in[T_k,\ *]\ \Leftrightarrow\ \binom{*}{*}\in[S_k,\ n]$

§6. あとがき

高校時代に取り組んだこの引き算の問題を，私は如何にして解いていったかの思考過程を，自分の古い大学ノートに見ることができます。はじめは5桁のT－列は少ししかわからず，その中から問題を解いていました。16個もあるとは知りませんでした。T－表はまだ考えの及ばない状態でした。いずれにしても，今回の引き算の問題から恐らく誰も考えもしないことだろうこの構造への道筋を，私が辿っていったことの不思議さを感じます。これまでにも数研通信に，数学のアイディアを提案してきました。数研通信 No.29『両不等式　2数の大小に関する試み』は高校時代「なんでこんなに面倒くさい解き方をするんだろう」から，きわめて自然に出てきた発想でした。また，最近では数研通信 No.69『円と直線の判別式 H を使った演習』は，実は直線に関する点対称の問題を行列の積のみの公式で解く方法を考案しましたので，今度は行列の積のみで円と直線の共有点の座標を求めてみようということから出てきたのが H の式です。この式を円と直線の共有点の個数に応用してみると，従来の方法に比べ簡素化できるということがわかり，提案させていただきました。このように数学の問題（クイズでもよい）で，如何にして解いたかの思考過程には，新しい着想の潜んでいることがある，ということを言いたかったのです。

《参考文献》

〔1〕 紅櫨　第14号　長崎県立川棚高等学校1987
紀要 BOX 理論－足算・引算もう一つの視点－

高橋敏夫
（長崎県立小浜高等学校）