多項式と確率をつなぐ

蔵川(くらかわ)　忠興(ただおき)

§1. はじめに

数学授業において心がけてきたことは，私の場合「目に見える解法」であった。そういったとき図に描いて捉えることが多かろうし，一見してのわかりやすさは他に勝るものはないかも知れない。しかしここに紹介するものは趣が違う。ただ心がけはそのつもりで，本考察も確率問題を考えていたときの思いつきがきっかけになっている。その思いつきとは，根元事象をひらがなで表し，試行にともない起こる事象の個数が分布するようすを多項式に仕立てて眺めるものだった。まずはご覧いただければと願う。

§2. 具体例から

事象の個数が分布するようすを多項式に仕立てて眺める方法について，よくある設問に従い，いくつか例を示そう。

〔**問１**〕　３人でじゃんけんを１回するとき，１人だけが勝つ確率を求めよ。

まずは多項式に仕立て解答を示そう。

$$(ぐ+ち+ぱ)^3=ぐ^3+ち^3+ぱ^3$$
$$+3ぐ^2ち+3ち^2ぱ+3ぱ^2ぐ$$
$$\underline{+3ぐち^2+3ちぱ^2+3ぱぐ^2}$$
$$+6ぐちぱ \quad \cdots\cdots①$$

(注：右辺の積は根元事象の組合せを意味する。それと下線部分について，$3ぐち^2$ は，３人のうち１人が「ぐ」で，残る２人は「ちょき」つまり３人のうち１人が勝っている，そしてそれは３通りある，と読み取る。他も同様)

全事象の個数（以下「$\sum$係数」と書く）

$$\sum 係数=1+1+1+3+3+3+3+3+3+6=27$$

（①右辺の係数の総和）

対象となる事象の個数（以下「σ係数」と書く）

σ係数$=3+3+3=9$　（下線部分の係数）

求める確率は

$$\frac{\sigma 係数}{\sum 係数}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots②$$

便宜上，この解答の流れを《**多項式による解法**》と呼ぶ。

この解答が教科書ではおよそ次のようになろう。

じゃんけんの出し方について

全事象の個数　3^3

３人のうち１人だけ勝つ　${}_3C_1$

じゃんけんの出し方３種のいずれかで勝つ　${}_3C_1$

したがって，対象となる事象の個数は

$${}_3C_1\times{}_3C_1$$

求める確率は

$$p=\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{3^3}=\frac{3\times3}{3^3}=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots③$$

便宜上，この解答の流れを《**通常の解法**》と呼ぶ。

結果は②，③いずれも解法によらず一致する。

さらに例示する。

〔**問２**〕　４個のさいころを同時に投げるとき，２個が偶数の目になっている確率を求めよ。

《**多項式による解法**》では

「４個を同時に投げる」$(ぐ+き)^4$ と表す。

ただし，「ぐ」は偶数「き」は奇数を示している。

これを展開すれば

$$(ぐ+き)^4=ぐ^4+4ぐ^3き+\underline{6ぐ^2き^2}+4ぐき^3+き^4 \quad \cdots\cdots④$$

(注：＿＿線部分については，４個のうち２個のさいころが偶数の目であり，それが６通りあると読む)

④の右辺から　$\sum$係数$=1+4+6+4+1=16$

σ係数$=6$　（下線部分の係数）

求める確率は　$\dfrac{\sigma\,係数}{\sum 係数}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

《**通常の解法**》では

さいころの目の出方について　全事象の個数　6^4

4 個のうち 2 個が偶数の目になっている

$${}_4C_2\times3^2\times(6-3)^2$$

求める確率は

$$p=\frac{{}_4C_2\times3^2\times(6-3)^2}{6^4}=\frac{3^4}{6^3}=\frac{3}{8}$$

本問でも，解法によらず結果は一致する。

確率の計算とは，全事象の個数に対する部分事象の個数の割合である。問われるのは，全事象の個数はいくつで，問題の対象となる事象の個数はいくつなのか。それらの個数が正確に求められるか否か，である。《**多項式による解法**》を用いれば，〔問 1〕は $(ぐ+ち+ぱ)^3$ を，〔問 2〕では $(ぐ+き)^4$ を最初に持ち込み展開する。そうすることによって，以下の利便がもたらされる。

(1)　**起こるべき事象のすべての組合せが現れる。**

(2)　**同時にそれらの個数も得られる。**

ただし，注意しなければならないことがある。〔問 1〕と〔問 2〕をご覧になりお気づきだろうが，全事象の個数や問題とする事象の個数について，実個数（実際の個数）が現れる場合と，そうでない場合とがあった。〔問 1〕の場合「ぐ」「ち」「ぱ」はいずれも 1 通りなのに対し，〔問 2〕の場合「ぐ」「き」はいずれも 3 通りずつ。

念のため《**多項式による解法**》において実個数を用い〔問 2〕を解けば，

$$\sum 係数=1\times3^4+4\times(3^3\times3)+6\times(3^2\times3^2)$$
$$+4\times(3\times3^3)+1\times3^4=16\times3^4=6^4$$
$$\sigma\,係数=6\times(3^2\times3^2)=6\times3^4$$

であって，

求める確率は　$\dfrac{\sigma\,係数}{\sum 係数}=\dfrac{6\times3^4}{6^4}=\dfrac{6\times3^4}{16\times3^4}=\dfrac{3}{8}$

結果は変わらないが，これが本来であろうか。（注：〔問 2〕の場合 $(ぐ+き)^4$ よりも $(3ぐ+3き)^4$ とするのが本来かもしれないが，ぐ：き＝3：3 ゆえ，約分して 1：1 とし簡略可）

各事象の実個数を知らずに，確率問題を解くのがよいのか，という問いかけはもちろん忘れてはならない。しかしながら問題によって《**多項式による解法**》には，各事象の実個数を知らずとも確率を弾き出せる利便も，もたらされることがわかる。

つまり，(1)，(2)に加え，もう 1 つの利便。

(3)　**問題により事象の実個数（比率が約分されるとき）を気にせず計算すればよい。**

以上，合わせて 3 つの利便が《**多項式による解法**》を使うことによって得られる次第である。

ここで，〔問 1〕の《**多項式による解法**》について視点を変え点検してみよう。

〔問 1〕の根元事象すべての組合せを列挙すれば，3 人のじゃんけんの出し方（積で表現するとした）は

「$ぐ^3$」「$ち^3$」「$ぱ^3$」「$ぐ^2ち$」「$ぐち^2$」「$ち^2ぱ$」

「$ちぱ^2$」「$ぱ^2ぐ$」「$ぱぐ^2$」「ぐちぱ」

となり，合わせて 10 種。

そしてそれぞれの個数は以下のようで，

「$ぐ^3$」「$ち^3$」「$ぱ^3$」の出し方つまり相子

いずれも 1 通り

「$ぐち^2$」「$ちぱ^2$」「$ぱぐ^2$」の出し方

3 人のうち 1 人だけが勝っている

他の組合せも同様で，それぞれ ${}_3C_1=3$ 通り

「ぐちぱ」の出し方　　　　　これも相子

個数は 3 人の出し方の順列に相当　$3!=6$

これら 10 種の組合せについて，上に計算した個数を係数とし加法でつなげば，①式で左辺を展開し得られた右辺へ一致する。加法でつなぐ理由は，個数は正の整数が相応しかろうからと考える。つないだものを改めて記せば，次式⑤である。

$$ぐ^3+ち^3+ぱ^3+3ぐ^2ち+3ち^2ぱ+3ぱ^2ぐ$$
$$+3ぐち^2+3ちぱ^2+3ぱぐ^2+6ぐちぱ \quad\cdots\cdots⑤$$

これは 3 人で 1 回じゃんけんするときに起こる根元事象すべての組合せ具合とその個数を多項式という形を借り，表し切っている。

ところが，ご承知のように⑤は因数分解できて，

$$=(ぐ+ち+ぱ)^3 \quad\cdots\cdots⑥$$

となるが，これを以下のように見なす。すなわち，

3 人でじゃんけんするときの全事象　3^3

と，通常は数字のみを使って書く。しかし，根元事象 3 種をひらがな「ぐ」「ち」「ぱ」に置き換え，それら 3 つを加法でつなぐ多項式により，ひとりの人によるじゃんけんの出し方を表し，その上で，⑥を

「3人が同時に1回勝負している」と見なす。すると結果として，同時に3人が1回じゃんけんするときに起こる根元事象すべての組合せとその個数を加法でつなぐ多項式⑤と，じゃんけんを3人で1回勝負する全事象とが因数分解を介して一致することになる。

方向を変え，①式を右辺から左辺方向に見る説明をした。ただし〔問1〕にあっては，

$$(ぐ+ち+ぱ)^3 \to ぐ^3+ち^3+ぱ^3 +3ぐ^2ち+3ち^2ぱ+3ぱ^2ぐ +3ぐち^2+3ちぱ^2+3ぱぐ^2+6ぐちぱ$$

の方向で式を使い，《**多項式による解法**》の利便を前面に出しご覧いただいた次第である。

最後に，やや発展させ，事象の起こる比率がもともと 1：1 でなく，約分できない例も示しておこう。

〔**問3**〕 さいころ3個を投げるとき，1の目が x 個出る確率を求めよ。
ただし，$0 \leqq x \leqq 3$ とする。

本問では先に《**通常の解法**》から示そう。例えば，

$x=1$ のときなら

$$\frac{{}_3C_1 \times 1 \times 5^2}{6^3}=\frac{75}{6^3}=\frac{25}{72} \quad \cdots\cdots ⑦$$

$x=2$ のときなら

$$\frac{{}_3C_2 \times 1^2 \times 5}{6^3}=\frac{15}{6^3}=\frac{5}{72} \quad \cdots\cdots ⑧$$

など，となる。

これが《**多項式による解法**》によれば，

「さいころ3個投げる」$(い+5そ)^3$ と表す。
ただし，い=1，そ=2～6 の目に対応させている。
これを展開すれば

$$(い+5そ)^3$$
$$=い^3+3(い)^2(5そ)+3(い)(5そ)^2+(5そ)^3$$
$$=い^3+15い^2そ+75いそ^2+125そ^3 \quad \cdots\cdots ⑨$$

この関係式を使い，$x=1$ のときなら⑨式において

$\sum$ 係数$=1+15+75+125=216$
（本問では係数に実個数が現れている）

σ 係数$=75$

$$\frac{\sigma \text{係数}}{\sum \text{係数}}=\frac{75}{216}=\frac{25}{72}$$

また，$x=2$ のときなら⑨式において

$\sum$ 係数$=1+15+75+125=216$

σ 係数$=15$

$$\frac{\sigma \text{係数}}{\sum \text{係数}}=\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$$

となり，それぞれ⑦，⑧に一致する。
つまり，事象の起こる比率が 1：1 でなく，項間に 1：5 の重みがついていても同様であって，《**多項式による解法**》としては σ 係数÷$\sum$ 係数 を計算すればよいことがわかる。

§3. 一般の場合について

§2では独立な試行を考察した。目視でほとんど明らかながら，多項式に仕立て確率を考える際，その試行が「独立」であるか否か，一般の場合について判別条件を述べておく。

一般といっても，確率で問題とする素材や試行のありさまは多様で，一括りに捉えにくく，限定するのも簡単ではない。ただ以下では，試行は n 人とか n 個などにより同時に1回行われるか，または同じ試行を n 回繰り返し（有限個入った袋の中から，戻すことなく玉を取り出す試行等は，n 回といえども自ずと回数に限度は生じる），対象とする素材は単一かつ試行に応じて事象に制約を課したりしないものとする。「単一」という意味は異なる素材を合成したりしないものである。なお，試行を繰り返す場合，その回数に応じた順序にともない，結果としての事象が異なる意味をもつときも考えられ，積について交換法則が制約を受け，同類項として丸めて扱えないものもある。実に多様であって，証明が多岐になるのを避けるため，本節では積について交換可能な場合に限って考察する。また，本来根元事象とは，1個の要素からなるものと定義されているが，同一視できるものは個数をまとめ，重みとして扱うこととする。

確率の対象とする問題において，
根元の事象を $\mu_i \,(1 \leqq i \leqq m)$ とおく。
このとき起こりうる事象のすべての組合せを

$$\mu_1{}^{p_1}\mu_2{}^{p_2}\cdots\mu_m{}^{p_m} \quad \cdots\cdots ①$$

と積で捉える。ここに
p_k：整数，$1 \leqq k \leqq m$

$$p_1+p_2+\cdots+p_k+\cdots+p_m=n,\ 0\leqq p_k\leqq n \quad \cdots\cdots②$$

を満たす。これらを加法でつなぎ，多項式に仕立て

$$\sum_{q=1}^{r} b_q\mu_1^{p_1}\mu_2^{p_2}\cdots\mu_m^{p_m} \quad \cdots\cdots③$$

(注：このとき③の項の並べ順を特に意識する必要はない)

なお，b_1，b_2，…，b_r $(1\leqq r<m^n)$ は①において p_k がとる整数値の組合せに応じた事象が起こる各々の個数であり，あらかじめすべて数えあげておく。

他方，私の方法によれば，重み (注：ここでは重みの比率は約分しない) も考慮したうえで，根元事象はともかく和でつなぎ，まずは１次の多項式に仕立てる。つまり

$$a_1\mu_1+a_2\mu_2+\cdots+a_m\mu_m \quad \cdots\cdots④$$

ただし，a_i $(1\leqq i\leqq m)$：重み，正の整数

ところで，独立な試行とは，根元事象が重みも含めて変化なく繰り返される試行，と言い換えてよい。本節では，対象とする素材を単一かつ試行に応じて事象に制約を課したりしない場合に限定し，かつ試行を n 人とか n 個などにより，同時に１回行うか，もしくは n 回繰り返すのであった。このとき，当該の問題が仮に独立な試行だったとすれば，④より

$$(a_1\mu_1+a_2\mu_2+\cdots+a_m\mu_m)^n \quad \cdots\cdots⑤$$

である。これを展開し

$$=c_1\mu_1{}^n+c_2\mu_2{}^n+\cdots+c_m\mu_m{}^n+c_{m+1}\mu_1{}^{n-1}\mu_2{}^1+c_{m+2}\mu_1{}^1\mu_2{}^{n-1}+\cdots+c_s\prod_{i,k=1}^{m}\mu_i{}^{p_k} \quad \cdots\cdots⑥$$

(注：項の並べ順については，おおよそ次の要領で整理しておくものとする。μ_i の種類が少ないほど，また番号 i がより小さくかつその次数が高いほどより前へ並べるのを原則とする。)

になったとする。なお，積について交換可能な場合に限っているから，c_1，c_2，…，c_s $(1\leqq s<m^n)$ は，⑤を展開後同類項として丸め整理された係数とする。

ここで⑥と③とを比較する。そのとき，

「⑥に含まれる項 (係数は除く) が等しく③に含まれ，かつ $s=r$」 ……⑦

「すべての同一項の係数が相等しい」 ……⑧

条件⑦を満たしかつ⑧を満たすことが，問題とする試行が「独立な試行」であるための必要十分条件である。ほとんど自明ながら，このことを示そう。

まず条件⑦について，⑥と③とを比較してゆき，同一項 (係数は除く) が③に欠けてなくかつ $s=r$ ならば，③のすべての項 (係数は除く) について，試行が独立であるときと一致する。逆に，問題とする試行が独立ならば，⑥と③とを比較するとき③に欠ける項 (係数は除く) はなく余分な項もないはずで

$s=r$

次に条件⑧である。条件⑦はすでに満たしている。ここで③の項の順序について⑥の項の順序に一致させながら入れ替える。それが

$$b_1\mu_1{}^n+b_2\mu_2{}^n+\cdots+b_m\mu_m{}^n+b_{m+1}\mu_1{}^{n-1}\mu_2{}^1+b_{m+2}\mu_1{}^1\mu_2{}^{n-1}+\cdots+b_r\prod_{i,k=1}^{m}\mu_i{}^{p_k} \quad \cdots\cdots⑨$$

になったとする。なお項を並べ替える際，係数 b_1，b_2，…，b_r $(1\leqq r<m^n)$ について，添え字の番号は必要に応じ付け替える (番号は付け替えても，個数としての値はもちろん変えない)。すると，根元事象のすべての組合せ①について，あらかじめ数えあげておいた個数を係数とし加法でつないだ⑨，すなわち

$$b_1\mu_1{}^n+b_2\mu_2{}^n+\cdots+b_m\mu_m{}^n+b_{m+1}\mu_1{}^{n-1}\mu_2{}^1+b_{m+2}\mu_1{}^1\mu_2{}^{n-1}+\cdots+b_r\prod_{i,k=1}^{m}\mu_i{}^{p_k}$$

について，⑦を満たしたうえで⑧が成り立てば

$$=c_1\mu_1{}^n+c_2\mu_2{}^n+\cdots+c_m\mu_m{}^n+c_{m+1}\mu_1{}^{n-1}\mu_2{}^1+c_{m+2}\mu_1{}^1\mu_2{}^{n-1}+\cdots+c_s\prod_{i,k=1}^{m}\mu_i{}^{p_k}$$

$$\Rightarrow\ (a_1\mu_1+a_2\mu_2+\cdots+a_m\mu_m)^n$$

すなわち

$$b_1\mu_1{}^n+b_2\mu_2{}^n+\cdots+b_m\mu_m{}^n+b_{m+1}\mu_1{}^{n-1}\mu_2{}^1+b_{m+2}\mu_1{}^1\mu_2{}^{n-1}+\cdots+b_r\prod_{i,k=1}^{m}\mu_i{}^{p_k}$$

$$\Rightarrow\ (a_1\mu_1+a_2\mu_2+\cdots+a_m\mu_m)^n$$

また逆に

$$(a_1\mu_1{}^n+a_2\mu_2+\cdots+a_m\mu_m)^n\ \Rightarrow$$

$$c_1\mu_1{}^n+c_2\mu_2{}^n+\cdots+c_m\mu_m{}^n+c_{m+1}\mu_1{}^{n-1}\mu_2{}^1+c_{m+2}\mu_1{}^1\mu_2{}^{n-1}+\cdots+c_s\prod_{i,k=1}^{m}\mu_i{}^{p_k}$$

であり，⑦を満たしたうえで⑧が成り立てば

$$=b_1\mu_1{}^n+b_2\mu_2{}^n+\cdots+b_m\mu_m{}^n+b_{m+1}\mu_1{}^{n-1}\mu_2{}^1+b_{m+2}\mu_1{}^1\mu_2{}^{n-1}+\cdots+b_r\prod_{i,k=1}^{m}\mu_i{}^{p_k}$$

すなわち

$$(a_1\mu_1+a_2\mu_2+\cdots+a_m\mu_m)^n \Rightarrow$$
$$b_1{\mu_1}^n+b_2{\mu_2}^n+\cdots+b_m{\mu_m}^n+b_{m+1}{\mu_1}^{n-1}{\mu_2}^1$$
$$+b_{m+2}{\mu_1}^1{\mu_2}^{n-1}+\cdots+b_r\prod_{i,k=1}^{m}{\mu_i}^{p_k}$$
以上より
$$b_1{\mu_1}^n+b_2{\mu_2}^n+\cdots+b_m{\mu_m}^n+b_{m+1}{\mu_1}^{n-1}{\mu_2}^1$$
$$+b_{m+2}{\mu_1}^1{\mu_2}^{n-1}+\cdots+b_r\prod_{i,k=1}^{m}{\mu_i}^{p_k}$$
$$\Longleftrightarrow (a_1\mu_1+a_2\mu_2+\cdots+a_m\mu_m)^n$$
がいえ，試行が独立であるための必要十分条件は，⑦を満たしかつ⑧が成り立つこと，それが示された。

この結論に従えば，加法でつなぎ多項式に仕立てるとき，「独立な試行なら，(項数 m の多項式)^n の形に因数分解できる」あるいは「(項数 m の多項式)^n の形に因数分解できるなら，独立な試行」と判別がつく。

ところで，⑥式の係数は
$$c_l=\frac{n!}{p_1!\cdots p_m!}\times {a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots {a_m}^{p_m}\ (1\leqq l\leqq s)\ \cdots\cdots⑩$$
のはずである。他方，多項式⑨の b_j について
$$b_j\div {a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots {a_m}^{p_m}\ (1\leqq j\leqq r)\ \cdots\cdots⑪$$
を計算する。(注：指数 p_1，p_2，…，p_m の値は⑥において $j\,(=l)$ 番目の項 ${\mu_1}^{p_1}{\mu_2}^{p_2}\cdots{\mu_m}^{p_m}$ の指数の値とする)

このとき⑪の計算値が整数になるか否か，さらには整数であっても，すべて $\dfrac{n!}{p_1!\cdots p_m!}$ に一致するか否か。
⑪の値次第であるが，これが否であれば，
「少なくとも (項数 m の多項式)^n の形には因数分解できない」といった判別もつく。

§4. あとがき

試行が独立であろうが，独立でなかろうが，《**多項式による解法**》によっても構わない。しかし，《**多項式による解法**》を使うなら３つの利便を活かしたい。つまり，(項数 m の多項式)^n から入りまず展開したい。§3で示せたのは，試行が独立な場合に限って(項数 m の多項式)^n から入り，３つの利便を活かせるということであり，目下独立な試行でない場合には，何らかの利便をともなう方法には思い至っていない。

§2で示したように，事象を表す変数として英文字ではなく，敢えてひらがなを用いたところが味噌だと考えている。見慣れない式により，一層の興味を生徒へ喚起するためでもあった。

独立な試行でないときは，全事象の個数は当然として，多項式を用意する間に必要な事象の個数だけ求め確率計算すれば早い。袋から同時に複数個の玉を取る問題などで§3の③に相当する多項式を用意してみれば，一般に因数分解できないのがわかったりするが，一度使ってみるのか否か，それは当然，現場の事情を含めて本稿に目を通してくださった皆様次第である。私としては以上の考察をすることにより，場合の数つまり全事象を含め事象の組合せの個数について，ともすれば「手探りあるのみ」の印象がつきまといがちだったのが，多項式とつなぐことにより，存外明確な規則に乗っ取っていたにすぎないという，一種の安心感めいたものを得ることができた。

（追記）　試行の回数に応じ，事象の積について交換法則が制約を受ける場合，⑥で言えば，m^n 個の項を１個ずつ異なるものとして扱う必要も出てくる。つまり，s が m^n に一致するときだが，《**多項式による解法**》にこだわれば，京大 2012 年前期理系入試の６番などにもこの対応が必要になる。例えば，３回目試行時でも (項数６の多項式)^3 の展開が必要なうえに，順序に気遣いながら σ 係数を拾い集める作業は手間がかかる。根元事象の数が多いうえに，事象の積について交換法則が制約を受けるとき，独立な試行であっても，《**多項式による解法**》を使う利便があるとは言い難いが，多項式仕立てでもちろん捉えきれることは念のため追記しておく。

《参考文献》

〔１〕 大学入試シリーズ 2013
京都大学　理系　教学社
〔２〕 数学Ａ　数研出版

（大阪府　精華高等学校）