2元1次不定方程式の特殊解の新しい求め方
－ユークリッド互除法の逆行－

小島　一義（こじま　かずよし）

§1. はじめに

昨年度より新課程が実施され，「データの分析」「整数」などが新しい教材となりました。本校数学科では九州数学教育会の「類比方式による　数学ⅠA問題集」の改訂編集を担当することもあって，早くから新課程に向けて準備をしてきました。しかし，実際に授業をするとなれば，さらに本気で考えるようになり，気がついたことがいくつかあります。

例えば，相関係数 r は，余り興味もなかったうえに，その定義は煩雑で遠ざけてきました。授業するにあたって，$-1 \leqq r \leqq 1$ という性質を証明してみようと思ったところ，実に単純だったことに気づきました。

定義をじっと見ていると，データ $(x_i,\ y_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ に対して，x_i，y_i の平均をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ としたとき，$\overrightarrow{X}=(x_1-\overline{x},\ x_2-\overline{x},\ \cdots,\ x_n-\overline{x})$，$\overrightarrow{Y}=(y_1-\overline{y},\ y_2-\overline{y},\ \cdots,\ y_n-\overline{y})$ のなす角を θ とおけば，相関係数 r は $r=\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y}}{|\overrightarrow{X}||\overrightarrow{Y}|}$ と定義したものと同じでした。結局 $-1 \leqq r \leqq 1$ は，シュワルツの不等式にほかならず，$r=1$ なら同じ向きで，$r=-1$ なら逆向きは当然です。そのことは，どの統計のテキストでも見かけたことがなかったのですが，早く気がつくべきでした。

同じようにこれまであまり深く考えてこなかった「2元1次不定方程式の整数解を1つ求める問題」を授業するにあたって新しい解法を発見しましたので，この紙面を通して紹介したいと思います。

§2. 教科書に見る記載

(例題)　等式 $53x+37y=1$ を満たす整数 x，y の組を1つ求めよ。

(解答)　53と37に互除法の計算を行うと，次のようになる。

$53=37\cdot1+16$　　移項すると　$16=53-37\cdot1$

$37=16\cdot2+5$　　移項すると　$5=37-16\cdot2$

$16=5\cdot3+1$　　移項すると　$1=16-5\cdot3$

よって　$1=16-15\cdot3$

$=16-(37-16\cdot2)\cdot3$

$=16\cdot7+37\cdot(-3)$

$=(53-37\cdot1)\cdot7+37\cdot(-3)$

$=53\cdot7+37\cdot(-10)$

すなわち　$53\cdot7+37\cdot(-10)=1$

したがって，求める整数 x，y の組の1つは，

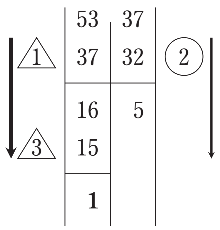
$x=7$，$y=-10$　　……(答)

この方法では互除法が長くなった場合にはとても煩雑であるし，計算ミスも起こりやすい。

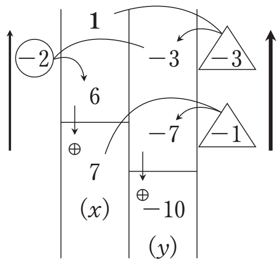
§3. 互除法とその逆行

簡単明快でアルゴリズミカリーに求める方法を考えました。それは，基本的にはユークリッドの互除法を逆にたどることで求められるので，「互除法の逆行」と名付けます。この互除法の逆行を用いて，$53x+37y=1$ を満たす整数 x，y の1組は，次のように求められる。

(互除法)



(逆行表)



ゆえに　$x=7$，$y=-10$　…(答)

(逆行表の作り方)　a，b が互いに素である場合には，$ax+by=1$ を満たす整数の組 x，y が存在する。今，a，b は互いに素であり，$a>0$，$b>0$ とする。この

とき，左側にxの係数，右側にyの係数を書いてユークリッドの互除法をすれば，最後に必ず1が残る。その1を基準として注目し，以下のようにする。

(手順1)　まず最上部にその1がある側に1を書く。

(手順2)　互除法の表に現れた外側の数を，それぞれ逆の側に，逆順にして，符号を逆(−)にして並べる。

(手順3)　次に，互除法と同じように，反対側の数と掛けた結果を表に書く。互除法では縦に並んだ2数を引くが，互除法とは逆に，縦に並んだ2つの数を加える。

(手順4)　これを繰り返す。最後に残った数で，左側がx，右側がyの整数解の組の1つである。

※ $53x+37y=1$ の一般解は次のように求められる。

$$y=\frac{1-53x}{37}=-1x+\frac{1-16x}{37}$$

$\dfrac{1-16x}{37}=z$ として $x=\dfrac{1-37z}{16}=-2z+\dfrac{1-5z}{16}$

$\dfrac{1-5z}{16}=w$ として $z=\dfrac{1-16w}{5}=-3w+\dfrac{1-w}{5}$

$\dfrac{1-w}{5}=k$ とおいて(z，w，kは整数)これを戻っていくと

$w=1-5k$，$z=-3(1-5k)+k=-3+16k$

$x=-2(-3+16k)+w=6-32k+1-5k$
$\quad=7-37k$

$y=-(7-37k)+z=-7+37k+(-3+16k)$
$\quad=-10+53k$

ここで $k=0$ としたら，特殊解 $x=7$，$y=-10$ となる。

この手順を表にしたものが，逆行表である。

§4. 互除法の逆行の原理

例を見ながら考えるとわかりやすい。§3の例では，x，yの一般解を求めるのに，整数z，w，kを用いたが，x_1，y_1，x_2，y_2，…として考えることが，逆行表をつくるポイントである。

(例)　$3011x+2101y=1$ を満たす整数x，yについて考える。

$$y=\frac{1-3011x}{2101}=-x+\frac{1-910x}{2101} \quad\cdots\cdots①$$

$$\frac{1-910x}{2101}=y_1\ (\text{整数})\ \text{とおく。}$$

$$x=-2y_1+\frac{1-281y_1}{910} \quad\cdots\cdots②$$

$$\frac{1-281y_1}{910}=x_1\ (\text{整数})\ \text{とおく。}$$

$$y_1=-3x_1+\frac{1-67x_1}{281} \quad\cdots\cdots③$$

$$\frac{1-67x_1}{281}=y_2\ (\text{整数})\ \text{とおく。}$$

$$x_1=-4y_2+\frac{1-13y_2}{67} \quad\cdots\cdots④$$

$$\frac{1-13y_2}{67}=x_2\ (\text{整数})\ \text{とおく。}$$

$$y_2=-5x_2+\frac{1-2x_2}{13} \quad\cdots\cdots⑤$$

$$\frac{1-2x_2}{13}=y_3\ (\text{整数})\ \text{とおく。}$$

$$x_2=-6y_3+\frac{1-y_3}{2} \quad\cdots\cdots⑥$$

$$\frac{1-y_3}{2}=x_3\ (\text{整数})\ \text{とおく。} \quad\cdots\cdots⑦$$

⑦より $y_3=1-2x_3$	③より $y_1=-3x_1+y_2$
⑥より $x_2=-6y_3+x_3$	②より $x=-2y_1+x_1$
⑤より $y_2=-5x_2+y_3$	①より $y=-x+y_1$
④より $x_1=-4y_2+x_2$	

ここで，これらを順に代入していけば，x，yがx_3の1次式で表すことができて，x，yの一般的な整数解が求められるのであるが，解の1組を求めるだけなら特に，$y_3=1$ とすると，⑦から $x_3=0$ となりより簡単である。

このとき⑦からさかのぼって

⑥より $x_2=-6y_3$	③より $y_1=-3x_1+y_2$
⑤より $y_2=-5x_2+1$	②より $x=-2y_1+x_1$
④より $x_1=-4y_2+x_2$	①より $y=-x+y_1$

これを逆行表で見てみると，次のようになり原理がすぐに理解できる。

		$y_3=1$	
-6	$x_2=-6y_3$	$-5x_2$	-5
-4	$-4y_2$	$\oplus\ y_2=-5x_2+1$	
	$\oplus\ x_1=-4y_2+x_2$	$-3x_1$	-3
-2	$-2y_1$	$\oplus\ y_1=-3x_1+y_2$	
	$\oplus\ x=-2y_1+x_1$	$-x$	-1
		$\oplus\ y=-x+y_1$	

よって，次のような表ができる。

（互除法）

	3011	2101	
1	2101	1820	2
	910	281	
3	843	268	4
	67	13	
5	65	12	6
	2	**1**	

（逆行表）

		1	
−6	−6	30	−5
−4	−124	31	
	−130	390	−3
−2	−842	421	
	−972	972	−1
		1393	

ゆえに　$x=-972$，$y=1393$

実際，

$3011\cdot(-972)+2101\cdot1393=-2926692+2926693=1$

となっている。

§5. 他の応用例

原理⑷の⑦で，$3011x+2101y=1$ では，$y_3=1$ とした。同様に，$3011x+2101y=2$ ならば，⑦が $\dfrac{2-y_3}{2}=x_3$ となるので，$y_3=2$ とするとよい。一般的に $ax+by=c$ ではスタートを c としてできることがわかる。$ax_0+by_0=1$ のとき，

$a(cx_0)+b(cy_0)=c$ より求められると考えることと同じである。

(例)　$89x+69y=\mathbf{5}$ を満たす整数 x，y の組を1ついえ。

（互除法）

	89	69	
1	69	60	3
	20	9	
2	13	8	4
	2	**1**	

（逆行表）

		5	
−4	−20	40	−2
−3	−135	45	
	−155	155	−1
	(x)	200 (y)	

ゆえに $x=-155$，$y=200$ という1組の解が求められる。

実際，$89\cdot(-155)+69\cdot200=-13795+13800=5$ となっている。ただし，これは x，y の値が大きいので，$89\cdot(-17-69\cdot2)+69\cdot(22+89\cdot2)=5$ より $89\cdot(-17)+69\cdot22=5$ となり，$x=-17$，$y=22$ ともできる。

また，$3011x-2101y=1$ なら，

$3011x+2101(-y)=1$ と考えればよいので，

$3011x+2101y=1$ で逆行表を作った結果の y の値の符号を逆(−)にしたものが，$3011x-2101y=1$ を満たす整数解の組の1つであることになる。

このように考えれば，a，b，c の符号や値がどんなであっても，この方法が使えることがわかる。つまり，$ax+by=c$ では，c からスタートして，$a<0$ や $b<0$ の場合は，$|a|$，$|b|$ でユークリッドの互除法から逆行表を作れば，$|a|x+|b|y=1$ を満たす整数解の1組の x，y が求められるので，その x や y に対して，a や b が負である方の x，y の符号を変えれば(−1倍)よい。

(例)　$-105x+127y=-7$ を満たす整数 x，y の組を1ついえ。

（互除法）

	105	127	
4	88	105	1
	17	22	
3	15	17	1
	2	5	
		4	2
		1	

（逆行表）

		−7	
−2	14	−42	−3
−1	49	−49	
	63	−252	−4
−1	301	−301	
	364 $(-x)$	(y)	

表より $x=-364$，$y=-301$ が解の1組。実際，

$-105\cdot(-364)+127\cdot(-301)=38220-38227=-7$

となっている。これも

$-105\cdot(-127\cdot2-110)+127\cdot(-105\cdot2-91)=-7$

より

$-105\cdot(-110)+127\cdot(-91)=-7$ とみて $x=-110$，$y=-91$ としてもよいし，

$-105\cdot(-127\cdot3+17)+127\cdot(-105\cdot3+14)=-7$

より $-105\cdot17+127\cdot14=-7$ とみて $x=17$，$y=14$ としてもよい。

§6. 最後に

この不定方程式は，1700年ほど前からの問題です。長い歴史の中で，なかなか良い方法を発見したと思っています。この方法が先生方に認められて，広く利用されることになれば幸いです。授業をすればこそいろいろな発見があります。つくづく授業ができることに感謝したいと思います。

（福岡県立修猷館高等学校）