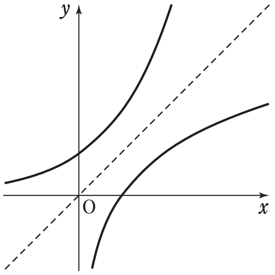
共通の底をもつ指数曲線と対数曲線の共有点について

伊藤　亘央（いとう　のぶお）

§1. はじめに

かつて，指数関数・対数関数の授業で，生徒からある質問を受けたことがある。

$a>1$ のとき，曲線 $y=a^x$ と曲線 $y=\log_a x$ は，図１のように，直線 $y=x$ について対称になる。



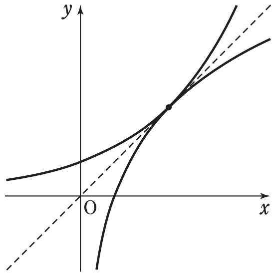
〔図１〕

生徒から出た質問は『２つの曲線は，交わったり接したりすることはないのか？』というものであった。

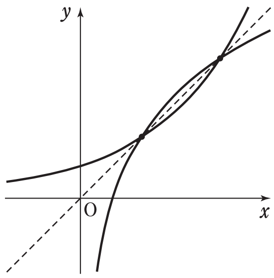
確かに，$a>1$ のときの曲線 $y=a^x$ と曲線 $y=\log_a x$ の対称性を表す図は，どの教科書や参考書を見ても，図１のように“離れた”図になっている。自分自身その生徒の質問の瞬間まで，離れているものだという固定観念を潜在的に持ち続けていたことに，初めて気づかされたのである。

よく考えてみると，図２のように接する場合，図３のように２点で交わる場合がある筈である。その時の質問に対しては，咄嗟に『a が１より大きい範囲で，１に近い小さい値である場合は２点で交わる』と答えた。これはやや漠然とした答え方である。

その質問を機会に，底 $a(>1)$ の値によって２曲線 $y=a^x$，$y=\log_a x$ の共有点のもち方がどうなるかを調べた。



〔図２〕



〔図３〕

§2. 底 $a\ (a>1)$ の値の調査

直線 $y=x$ についての対称性と，$y=a^x$（または $y=\log_a x$）が単調増加関数であることから，

『２曲線 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ の共有点の個数』

＝『直線 $y=x$ と曲線 $y=\log_a x$ の共有点の個数』

＝『方程式 $x=\log_a x$ の実数解の個数』

＝『方程式 $x=\dfrac{\log x}{\log a}$ の実数解の個数』

＝『方程式 $\log a=\dfrac{\log x}{x}$ の実数解の個数』

＝『直線 $y=\log a$ と曲線 $y=\dfrac{\log x}{x}$ の共有点の個数』

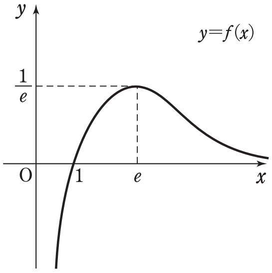
そこで，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおく。

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

$\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$



2曲線 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ の共有点の個数は，直線 $y=\log a$ と曲線 $y=f(x)$ の共有点の個数に等しいから，

・ $\log a > \dfrac{1}{e} \iff a > e^{\frac{1}{e}}$ のとき，
共有点はない。

・ $\log a = \dfrac{1}{e} \iff a = e^{\frac{1}{e}}$ のとき，
共有点は1個，つまり接する。

・ $0 < \log a < \dfrac{1}{e} \iff 1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ のとき，
共有点は2個，つまり2点で交わる。

次に，接するときの接点の座標を求める。これは，曲線 $y=a^x$ が直線 $y=x$ と接するときの接点と同じである。このときは，$a=e^{\frac{1}{e}}$ で，直線 $y=x$ との接点における微分係数は1であるから，

$g(x)=(e^{\frac{1}{e}})^x$ とおき，$g'(x)=1$ を満たす x の値を求めればよい。

$g'(x)=\dfrac{1}{e}e^{\frac{x}{e}}=1$ より $e^{\frac{x}{e}}=e^1$

よって $x=e$，接点の座標は $(e,\ e)$ である。

§3. 結論

底 $a(>1)$ が共通である指数曲線と対数曲線は，$a=e^{\frac{1}{e}}$ の値を境に共有点のもち方が変わる。

・$a>e^{\frac{1}{e}}$ のとき，図1のように共有点はない。

・$a=e^{\frac{1}{e}}$ のとき，図2のように接する。接点は $(e,\ e)$。

・$1<a<e^{\frac{1}{e}}$ のとき，図3のように2点で交わる。

因に，この $e^{\frac{1}{e}}$ という値は約1.445である。

（愛知県　名古屋国際中学校·高等学校）