# 二等辺三角形 譚

松田　康雄（まつだ　やすお）

## §0. はじめに

正三角形以外の任意の三角形において，外心 O，重心 G，垂心 H は一直線（オイラー線）上にあって OG：GH＝1：2 が成り立つ。しかし，一般に内心 I はオイラー線上にない。二等辺三角形は頂角の二等分線がオイラー線になるので，この 4 心と傍心の 1 つが同一直線上にある。このことに関して次の定理が成り立つ。（〔2〕）

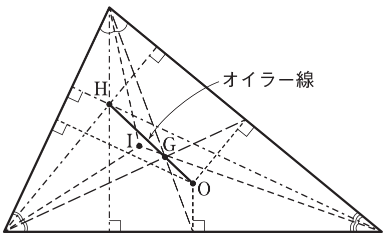



図 1　オイラー線

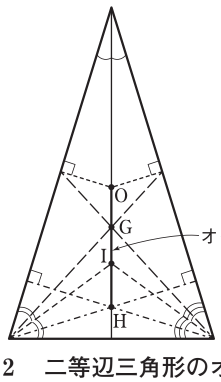



図 2　二等辺三角形のオイラー線

> **定理 1**　内心がオイラー線上にある三角形は二等辺三角形に限る。

本稿は正三角形を除く二等辺三角形とその内心に関して述べる。

## §1. 二等辺三角形に関する問題

まず二等辺三角形に関する次の問題から。

> **問題 1**　△ABC は AB＝AC＝13，BC＝10 の二等辺三角形とする。その外心を O，垂心を H，内心を I とし，辺 BC の中点を M とする。
> (1)　AM を求めよ。　(2)　AO を求めよ。
> (3)　AH を求めよ。　(4)　AI を求めよ。
> (5)　OI：IH を求めよ。

外心，垂心，内心の定義と性質の復習を兼ねた問題として以前から出題してきた。答は

(1)　AM＝12

(2)　$AO=\dfrac{169}{24}$

(3)　$AH=\dfrac{119}{12}$

(4)　$AI=\dfrac{26}{3}$

(5)　OI：IH＝13：10

である。

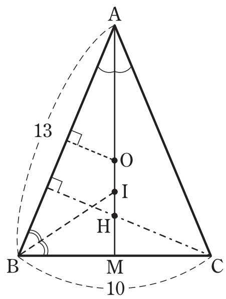



図 3　二等辺三角形の問題

これで注目すべきは(5)で

OI：IH＝13：10＝AB：BC

になることである。一般に次のことが成り立つ。

> **定理 2**　AB＝AC の二等辺三角形において，OI：IH＝AB：BC が成り立つ。

## §2. 内心の位置に関する定理の証明

定理 2 を証明する。

AB＝AC＝$a$，BC＝$2b$ $(a\neq 2b)$，辺 BC の中点を M とし $AM=c=\sqrt{a^2-b^2}$ とおく。

頂角が 90° より小さい場合，等しい場合，そして大きい場合で，それぞれ $a>\sqrt{2}\,b$，$a=\sqrt{2}\,b$，$a<\sqrt{2}\,b$ となる。また，それぞれ A，O，H の順に並ぶ，A と H が一致する，H，A，O の順に並ぶとなる。

辺 AB の中点を N，$\angle BAM=\alpha$ とおく。

$\cos\alpha=\dfrac{c}{a}$, $\tan\alpha=\dfrac{b}{c}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ について

$\mathrm{AB}\perp\mathrm{ON}$ 　直角三角形 OAN において,

$\mathrm{AO}=\dfrac{\mathrm{AN}}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{c}=\dfrac{a^2}{2c}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{a^2}{2c^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ について

$\angle\mathrm{MCH}=\alpha$ なので,

$\mathrm{MH}=\mathrm{CM}\tan\alpha=b\cdot\dfrac{b}{c}=\dfrac{b^2}{c}$

$$\mathrm{AH}=|\mathrm{AM}-\mathrm{MH}|=\left|c-\frac{b^2}{c}\right|=\left|\frac{c^2-b^2}{c}\right|$$

$$=\left|\frac{(a^2-b^2)-b^2}{c}\right|=\left|\frac{a^2-2b^2}{c}\right|$$

向きも含めて　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{a^2-2b^2}{c^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ について

BI は $\angle\mathrm{ABM}$ の二等分線より,

$\mathrm{AI}:\mathrm{MI}=\mathrm{AB}:\mathrm{BM}=a:b$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

$$=\frac{a(a-b)}{a^2-b^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{a(a-b)}{c^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

(4) O, I, H の位置関係

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\overrightarrow{\mathrm{AI}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{a(a-b)}{c^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\frac{a^2}{2c^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

$$=\frac{a(a-2b)}{2c^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{IH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{a^2-2b^2}{c^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\frac{a(a-b)}{c^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

$$=\frac{b(a-2b)}{c^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{IH}}=\dfrac{2b}{a}\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ より

$\mathrm{OI}:\mathrm{IH}=a:2b=\mathrm{AB}:\mathrm{BC}$ が成り立つ。

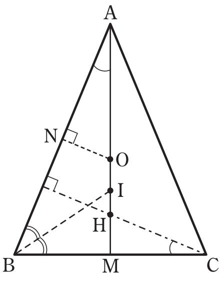



**図 4　頂角が 90° より小さい二等辺三角形**

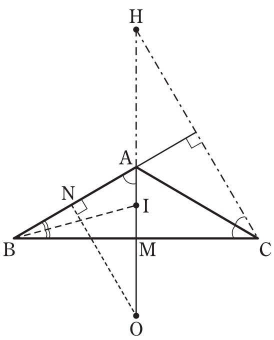



**図 5　頂角が 90° より大きい二等辺三角形**

## §3. 内接円と傍接円に関する定理

∠A に対する傍接円を単に「傍接円」と呼び，その中心を傍心と呼ぶ。次の定理が成り立つ。(証明略)

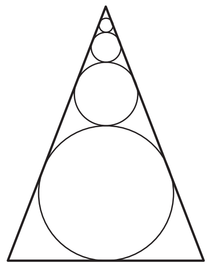
> **定理 3**　二等辺三角形において，内心と傍心は，外心と垂心を結ぶ線分を (等辺)：(底辺) の比にそれぞれ内分，外分する。

> **定理 4**　二等辺三角形において
> (外接円の直径)：(内接円と傍接円の半径の和)
> ＝(等辺)：(底辺)
> が成り立つ。

## §4. おわりに

二等辺三角形に関しては二等辺三角形ならではの性質があって興味深い。一般の三角形では難しく (ややこしく)，正三角形では単純すぎるが，二等辺三角形では手頃な問題が作れるという場合もある。例えば，次の問題 2 等である。

> **問題 2**　等辺が 3，底辺が 2 の二等辺三角形のなかで，図のように次々に接する円の面積の総和を求めよ。



**答**　$\dfrac{2}{3}\pi\left(\text{初項 }\dfrac{\pi}{2}\text{，公比 }\dfrac{1}{4}\text{ の無限等比級数の和}\right)$

今後も教材開発の一環として二等辺三角形の研究を続けたい。


**《参考文献》**

〔1〕 松田康雄 「内心がオイラー線上にある三角形」数学セミナー 2010 年 8 月号 NOTE, *pp*.68-69

〔2〕 松田康雄 「三角形の五心線」日本数学協会論文集第 6 号，2010 年，*pp*.18-19



(福岡県　久留米工業高等専門学校)