行列の対角化の「簡便法」とその応用について

橋口（はしぐち）　正（まさし）

§1. 連立漸化式の解法について

例題 1

連立漸化式

$(x_1,\ y_1)=(2,\ 1),\ \begin{cases} x_{n+1}=4x_n+y_n & \cdots\cdots(11) \\ y_{n+1}=2x_n+3y_n & \cdots\cdots(12) \end{cases}$

によって表される数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

解答

(11)−(12)×p とすると

$$x_{n+1}-py_{n+1}=(4-2p)x_n+(1-3p)y_n \quad \cdots\cdots(13)$$

$1:(-p)=(4-2p):(1-3p)$ のとき

$$(-p)(4-2p)=1-3p$$

$$\therefore\ 2p^2-p-1=0 \qquad \therefore\ (p-1)(2p+1)=0$$

$$\therefore\ p=1,\ -\frac{1}{2}$$

$p=1$ のとき　(13)より

$$x_{n+1}-y_{n+1}=2x_n-2y_n=2(x_n-y_n) \quad \cdots\cdots(14)$$

$p=-\dfrac{1}{2}$ のとき　(13)より

$$x_{n+1}+\frac{1}{2}y_{n+1}=5x_n+\frac{5}{2}y_n=5\left(x_n+\frac{1}{2}y_n\right)$$

$$\therefore\ 2x_{n+1}+y_{n+1}=5(2x_n+y_n) \quad \cdots\cdots(15)$$

(14), (15)より　(途中の計算は省略します)

$$x_n=\frac{5^n+2^{n-1}}{3},\ y_n=\frac{5^n-2^n}{3} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

上記の解法では，(13)から p を求め，(11), (12)を適当に実数倍して加減することにより(14), (15)を作る必要がある。(13)からの変形は 2 次方程式を解かねばならず，いささか面倒である。(13)を経ることなく簡単に(11), (12)を加減する方法を知ることはできないだろうか。

§2. 2 次の正方行列 A の対角化について

一般に異なる 2 個の固有値をもつ行列 A を対角化する際は，その固有値に対応する固有ベクトルを決めて行列 P を作り，さらに P^{-1} を計算して $P^{-1}AP$ を求めることにより A を対角化する。

本稿では，行列を固有ベクトルを使うより簡単に対角化し，連立漸化式，分数式の漸化式の解法に応用する。準備として，まず次の命題を証明する。

命題 1

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値を s, t $(s\neq t,\ st\neq 0)$ とし，

$P=\begin{pmatrix} a-s & b \\ c & d-t \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$,

$\varDelta=bc-(a-s)(d-t)$ とすると

$$P^{-1}=\frac{1}{\varDelta}P,\ A=PBP^{-1}=P^{-1}BP,\ PA=BP$$

証明

s, t は，固有方程式

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$$

の解であるから解と係数の関係により

$$a+d=s+t \quad \cdots\cdots(21)$$

$$ad-bc=st \quad \cdots\cdots(22)$$

(21)は　$a+d-s-t=0$　……(23)

あるいは　$a-s=t-d=-(d-t)$　……(24)

などと変形できる。ここで，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-s \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(a-s)+bc \\ c(a-s)+dc \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a(t-d)+bc \\ c(a-s+d) \end{pmatrix} \quad (\because\ (24))$$

$$=\begin{pmatrix} at-(ad-bc) \\ c(a+d-s) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} at-st \\ ct \end{pmatrix} \quad (\because\ (22),\ (23))$$

$$=t\begin{pmatrix} a-s \\ c \end{pmatrix}$$

同様に $A\begin{pmatrix} b \\ d-t \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} b \\ d-t \end{pmatrix}$ が示される。

よって，$\begin{pmatrix} a-s \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d-t \end{pmatrix}$ は A の固有ベクトルであ

り，固有値はそれぞれ t，s である。したがって，よく知られているように

$$P=\begin{pmatrix} a-s & b \\ c & d-t \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$P^{-1}AP=B$ と対角化できる。

ここで，ハミルトン・ケーリーの定理により

$$P^2-(a-s+d-t)P+\{(a-s)(d-t)-bc\}E=O$$

(23)より　$P^2-\varDelta E=O$　　$\therefore$　$P^2=\varDelta E$

よって　$P=\varDelta P^{-1}$　　$\therefore$　$P^{-1}=\dfrac{1}{\varDelta}P$

よって $A=PBP^{-1}$ は

$$A=PBP^{-1}=PB\left(\frac{1}{\varDelta}P\right)=\frac{1}{\varDelta}PBP=P^{-1}BP$$

すなわち　$PA=BP$　　　**終**

最後の式 $PA=BP$ を成分で表すと

$$\begin{pmatrix} a-s & b \\ c & d-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-s & b \\ c & d-t \end{pmatrix}$$

となり，この式が連立漸化式における変形を容易にしてくれる。

例：$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を命題1の方法で対角化する。

Aの固有方程式 $\lambda^2-7\lambda+10=(\lambda-2)(\lambda-5)=0$ の解が，$\lambda=2,\ 5$ であるから

$$P=\begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

とすると

$\varDelta=2-(-1)=3$ であるから　$P^{-1}=\dfrac{1}{3}P$

$$A=PBP^{-1}=PB\left(\frac{1}{3}P\right)=\frac{1}{3}PBP=P^{-1}BP \cdots (25)$$

このように簡単に対角化できることから，命題1の対角化を本稿では，対角化の「**簡便法**」と呼ぶことにする。簡便法の便利なところは

① P^{-1} が簡単に作れる。

② P^{-1} がPの実数倍($1/\varDelta$ 倍)なので
　　$A=PBP^{-1}=P^{-1}BP$
　が成り立つ。

§3. 連立漸化式への応用

例題1を簡便法で解く。

$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とすると §2の(25)より　$PA=BP$

さらに　$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ より

$$P\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=PA\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=BP\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x_{n+1}+y_{n+1} \\ 2x_{n+1}+y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(-x_n+y_n) \\ 5(2x_n+y_n) \end{pmatrix}$$

以下，省略。

行列Pの1行目は，(11)$\times(-1)+$(12)$\times1$ を，2行目は (11)$\times2+$(12)$\times1$ によって，それぞれ(14)，(15)と同値の式が作れることを示している。つまり，行列Pの成分をみれば(11)，(12)をどのように加減して(14)，(15)を作ればよいかを知ることができる。

一般に次のことが成り立つ。

命題2

> $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値を s，t ($s\neq t$，$st\neq0$) とすると，連立漸化式 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ は
>
> $$(*)\quad \begin{cases} (a-s)x_{n+1}+by_{n+1}=t((a-s)x_n+by_n) \\ cx_{n+1}+(d-t)y_{n+1}=s(cx_n+(d-t)y_n) \end{cases}$$
>
> と変形できる。

証明

命題1より　$PA=BP$ が成り立つから

$$PA\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=BP\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\qquad \therefore\quad P\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=BP\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

成分計算によって(*)が得られる。　　**終**

また，固有値2，5の順番を逆にして，

$$Q=\begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とすれば，$QA=CQ$ が成り立つ。

$$QA\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=CQ\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

すなわち　$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

したがって　$\begin{pmatrix} 2x_{n+1}+y_{n+1} \\ 2x_{n+1}-2y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5(2x_n+y_n) \\ 2(2x_n-2y_n) \end{pmatrix}$

1行目は(15)と同じ，2行目は(14)と同値である。

実は，Aの1行目だけで(*)を作る方法を知ることができる。例えば，$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，固有値 $\lambda=5$ を用いてAの1行目 $(4\ \ 1)$ から $(4-5\ \ 1)=(-1\ \ 1)$ とすることによって (11)$\times(-1)+$(12)$\times1$ として(14)を得る。また，固有値 $\lambda=2$ を用いて $(4-2\ \ 1)=(2\ \ 1)$ とすることによって，(11)$\times2+$(12)$\times1$ として(15)を得る

ことができる。すなわち

$\lambda=5$ に対しては，$(4-5):1=1:(-1)$ であるから

$x_{n+1}-y_{n+1}=2(x_n-y_n)$

$\lambda=2$ に対しては，$(4-2):1=2:1$ であるから

$2x_{n+1}+y_{n+1}=5(2x_n+y_n)$

と即座に変形が完了する。

このように行列Aの1行目だけで連立漸化式を解くための変形，すなわち例題2の(＊)を作るための加減の方法を知ることができる。

同様にして，行列Aの2行目だけでも(＊)を作る方法を知ることができる。命題としてまとめると，

命題3

> $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値を s，t $(s\neq t,\ st\neq 0)$ とすると，漸化式 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ は
>
> $(\alpha)\quad \begin{cases} (a-s)x_{n+1}+by_{n+1}=t((a-s)x_n+by_n) \\ cx_{n+1}+(d-t)y_{n+1}=s(cx_n+(d-t)y_n) \end{cases}$
>
> $(\beta)\quad \begin{cases} (a-s)x_{n+1}+by_{n+1}=t((a-s)x_n+by_n) \\ (a-t)x_{n+1}+by_{n+1}=s((a-t)x_n+by_n) \end{cases}$
>
> $(\gamma)\quad \begin{cases} cx_{n+1}+(d-s)y_{n+1}=t(cx_n+(d-s)y_n) \\ cx_{n+1}+(d-t)y_{n+1}=s(cx_n+(d-t)y_n) \end{cases}$
>
> などと変形できる。

上記の中から計算しやすいものを選択すればよい。

簡便法は答案には書けないが，一般的な解法を指導する際に，教師が加減の方法を暗算で知ることができ(α)〜(γ)を求めることができれば，演習の授業の際に何かと都合がよいと思われる。

例題2

> 連立漸化式
>
> $(x_1,\ y_1)=(2,\ 1)$，$\begin{cases} x_{n+1}=5x_n+2y_n & \cdots\cdots(31) \\ y_{n+1}=3x_n+4y_n & \cdots\cdots(32) \end{cases}$
>
> によって表される数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

準備として，以下のように考える。

行列 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda=2,\ 7$ である。ここでは(31)の係数のみに注目して変形してみる。

$\lambda=7$ に対しては，$(5-7):2=1:(-1)$

$\lambda=2$ に対しては，$(5-2):2=3:2$

となり(31)，(32)をどのように加減すればよいかがわかる。実際，変形は，それぞれ

(31)－(32) より　$x_{n+1}-y_{n+1}=2(x_n-y_n)$

(31)×3＋(32)×2 より　$3x_{n+1}+2y_{n+1}=7(3x_n+2y_n)$

$\boxed{\text{解答}}$

与えられた漸化式は

$(*)\quad \begin{cases} x_{n+1}-y_{n+1}=2(x_n-y_n) & \cdots\cdots(33) \\ 3x_{n+1}+2y_{n+1}=7(3x_n+2y_n) & \cdots\cdots(34) \end{cases}$

と変形できる。

(33)より数列 $\{x_n-y_n\}$ は，初項 $x_1-y_1=2-1=1$，公比2の等比数列であるから

$x_n-y_n=2^{n-1}$　$\cdots\cdots(35)$

(34)より数列 $\{3x_n+2y_n\}$ は，初項 $3x_1+2y_1=8$，公比7の等比数列であるから

$3x_n+2y_n=8\cdot 7^{n-1}$　$\cdots\cdots(36)$

(35)×2＋(36) より　$5x_n=2^n+8\cdot 7^{n-1}$

(36)－(35)×3 より　$5y_n=8\cdot 7^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}$

$x_n=\dfrac{2^n+8\cdot 7^{n-1}}{5}$，$y_n=\dfrac{8\cdot 7^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}{5}$　$\boxed{\text{終}}$

(32)の係数のみに注目してもよい。すなわち

$3:(4-2)=3:2$，$3:(4-7)=3:(-3)=1:(-1)$

から (31)×3＋(32)×2，(31)－(32) により(＊)ができる。

例題3

> 次の連立漸化式を命題3のように変形せよ。
>
> $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+4y_n & \cdots\cdots(37) \\ y_{n+1}=x_n+y_n & \cdots\cdots(38) \end{cases}$

$\boxed{\text{解答}}$

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有方程式

$\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)=0$

から固有値は $\lambda=3,\ -1$ である。

よって(37)の係数に着目すると

$(1-3):4=1:(-2)$，$(1+1):4=1:2$

(37)－(38)×2 より　$x_{n+1}-2y_{n+1}=-(x_n-2y_n)$

(37)＋(38)×2 より　$x_{n+1}+2y_{n+1}=3(x_n+2y_n)$

§4. 分数式の漸化式への応用

分数関数の合成や逆関数には，行列の積や逆行列が対応するので連立漸化式と同様に簡便法が使える。

例題4

> 漸化式
>
> $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+1}{2a_n+3}$
>
> によって表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

準備として，行列 $\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ の固有値が $\lambda=2,\ 5$ であるから $\begin{pmatrix}4-5 & 1\\ 2 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ の成分を用いて

$\dfrac{-a_{n+1}+1}{2a_{n+1}+1}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{-a_n+1}{2a_n+1}$　と変形できる。

さらに $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ であるから

$y=\dfrac{-x+1}{2x+1}$ のとき　$x=\dfrac{-y+1}{2y+1}$

のように係数をそのままにして逆関数を作ることができる。これらのことから次のように解答できる。

解答

$$\frac{-a_{n+1}+1}{2a_{n+1}+1}=\frac{-\dfrac{4a_n+1}{2a_n+3}+1}{2\dfrac{4a_n+1}{2a_n+3}+1}=\frac{-2a_n+2}{10a_n+5}$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{-a_n+1}{2a_n+1}$$

と変形できる。

数列 $\left\{\dfrac{-a_n+1}{2a_n+1}\right\}$ は，初項 $\dfrac{-a_1+1}{2a_1+1}=-\dfrac{1}{5}$，公比 $\dfrac{2}{5}$ の等比数列であるから

$$\frac{-a_n+1}{2a_n+1}=-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{-\left\{-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}+1}{2\left\{-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}+1}=\frac{5^n+2^{n-1}}{5^n-2^n}$$

例題 5

> 漸化式
>
> $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+4}{a_n+1}$
>
> によって表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答

$$\frac{2a_{n+1}+4}{a_{n+1}-2}=\frac{2\dfrac{a_n+4}{a_n+1}+4}{\dfrac{a_n+4}{a_n+1}a_n-2}=\frac{6a_n+12}{-a_n+2}$$

$$=-3\frac{2a_n+4}{a_n-2}\qquad\cdots\cdots(41)$$

と変形できる。

数列 $\left\{\dfrac{2a_n+4}{a_n-2}\right\}$ は，初項 $\dfrac{2a_1+4}{a_1-2}=-6$，公比 -3 の等比数列であるから

$$\frac{2a_n+4}{a_n-2}=-6(-3)^{n-1}\qquad\cdots\cdots(42)$$

よって　$a_n=\dfrac{2\{-6(-3)^{n-1}\}+4}{-6(-3)^{n-1}-2}=2\dfrac{(-3)^n+1}{(-3)^n-1}$

注意：(41)の分子は両辺を 2 で約分することができる。しかし，逆関数と逆行列の対応を考えると，(42)から係数をそのままにして a_n を求めることができることから，約分せずに係数をそのままにして計算した方が都合がよい。

(宮崎県立宮崎南高等学校)