

# 算術幾何平均による円周率の計算

ひとつまつ しん  
一松 信

## §1. 円周率の計算法について展望

円周率については多くの解説書があり、計算法の説明もあります。歴史的に見た展望は次のようです。

1. 古典的幾何学的方法 円に内接/外接する正多角形の周長を順次辺数を2倍して近似する。
2. 級数による方法 ルネサンス期以降、マチンの公式を初め多数の公式が知られている。
3. モジユラ関数による方法 20世紀後半以降発展。本稿はその最も簡単な一例である。

乗り物に例えると、1は自転車、2は自動車、3は飛行機といった感じです。目的地までの距離(必要な桁数)に応じて使い分けるべきでしょう。

もちろんモジユラ関数の一般論をここで論ずることはできません。算術幾何平均とそれによる $\pi$ の近似値計算法を紹介するだけです。少し難しいが、何とか高校数学Ⅲ(微分積分学)の範囲で扱えるのであえて解説します。近年の百万桁以上(1兆桁を超える)計算はすべてこの(ないしその発展した)方法によって行われています。

## §2. 算術幾何平均とは

正の定数 $a, b(a > b > 0)$ に対して、 $a_0 = a, b_0 = b$ とし、順次 $n = 0, 1, 2, \dots$ について

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (1)$$

とおくと、 $a_n$ は減少、 $b_n$ は増加し、両者はともに共通の極限值(算術幾何平均)に急激に近づきます。ここだけの記号ですが $\text{ag}(a, b)$ と表します。

この概念はオイラーの時代からありましたが、特にガウスが深く研究しました(定理2など)。その収束は非常に速いので、数値計算に有用です。

後に必要な補助定理をまず示します。(1)で

$$c_n = a_{n-1} - a_n = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$$

とおくと次の等式が成立します。

$$\begin{aligned} c_n^2 &= \left( \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right)^2 - a_{n-1} b_{n-1} = a_n^2 - b_n^2 \\ &= (a_n + b_n)(a_n - b_n) = 4a_{n+1} c_{n+1} \end{aligned} \quad (2)$$

(2)と合わせて $c_0 = \sqrt{a_0^2 - b_0^2}$ とおきます。

**定理1** 上の記号を使うと、無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2 \quad (3)$$

は収束する( $c_n \rightarrow 0$ に注意)。

**証明**  $c_n$ は0に収束するから、ある番号 $n_0$ から先の $n$ では $c_n < b$ である。

$$c_{n+1} = \frac{c_n^2}{4a_{n+1}} < \frac{c_n^2}{4b} < \frac{c_n}{4}$$

から $2^{n+1} c_{n+1} < \frac{2^n c_n}{2}$ である。すなわちある番号 $n_0$ 以降(3)は公比 $\frac{1}{2}$ の等比級数(優級数)で押さえられる。(高校数学の範囲を超えるが)正項級数が収束する優級数で押さえられれば、それ自身が収束する(実数の連続性の一形式)。□

## §3. 楕円積分との関係

3次/4次式の平方根を含む積分は、最初楕円の弧長の計算に現れたので、楕円積分と総称されます。一般的には初等関数では表されませんが、標準形があります。その中で最も基本的なのは

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (4)$$

で、ルジャンドル・ヤコビの第1種完全楕円積分とよばれます。 $k$ は母数とよばれる補助変数です。通例(以下でも) $0 \leq k < 1$ とします。

**定理2** 正の定数 $a, b(a > b > 0)$ に対して

$$K(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \quad (5)$$

とおくと $K(a, b) \cdot \text{ag}(a, b) = \frac{\pi}{2}$ である。

これは次の結果を示せば明らかです。

**定理 3**  $a, b$  の相加平均, 相乗平均を  $a_1, b_1$  とすると  $K(a, b) = K(a_1, b_1)$

定理 3 の証明は改めて次節で論じます。これがわかれば  $K(a, b) = K(a_n, b_n) = K(g, g)$ ,

$g = \text{ag}(a, b)$  で,  $K(g, g) = \frac{\pi}{2g}$  となります。定理

3 の証明が 1 つの難所です。  $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  とお

れば, 積分の変数変換で  $K(a, b) = \frac{K(k)}{a}$  です。

定理 2 の性質は Gauss が最初数値計算の結果から発見 (予測) し, 後に理論的に証明しました。現在まで  $K(k)$  の値を計算する標準的算法です。

#### §4. ランデンの変換

定理 3 の証明には, 次のランデン (Landen: 人名) の変換を活用します。それは次の変数変換です。

$$\tan \theta = \sin 2\phi / (k + \cos 2\phi) \quad (6)$$

この分母を払って整理し

$$k \sin \theta = \sin(2\phi - \theta) \quad (6')$$

と表すこともあります。  $k=0$  なら  $\theta=2\phi$  です。

$0 < k < 1$  のとき  $0 \leq \theta \leq \pi$  と  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  との間の

単調な 1 対 1 写像ですが, 若干の注意がいります。

$\phi=0$  に  $\theta=0$  を対応させ,  $\phi$  が増加すれば  $\theta$  も増加します。  $\cos 2\phi = -k$  のとき分母が 0 となって  $\theta = \frac{\pi}{2}$  に対応し,  $\phi$  がそれより大きくなると (6)

の右辺の分母は負になります。しかし  $\tan \theta < 0$  に対する  $\theta$  は,  $\frac{\pi}{2}$  から  $\pi$  までひき続き以前の値の延長

として連続につなぐ必要があります。

さて定数  $a, b$  ( $a > b > 0$ ) に対し,

$$A = a(1+k), B = a(1-k), k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (7)$$

とおくと  $A+B=2a$ ,  $AB=a^2(1-k^2)=b^2$  すなわち  $A$  と  $B$  の相加平均と相乗平均が  $a, b$  になります。そこで逆にとって  $K(a, b) = K(A, B)$  を証明します。以下は積分の変数変換の計算です。

**定理 3 の証明** 上述のとおり方から

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \theta} &= 1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 2\phi}{(k + \cos 2\phi)^2} \\ &= \frac{1 + 2k \cos 2\phi + k^2}{(k + \cos 2\phi)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{1 + 2k \cos 2\phi + k^2}}{k + \cos 2\phi} \quad (8')$$

( $\cos 2\phi < -k$  の部分は  $\cos \theta < 0$ ;  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ )

となる。  $b^2 = a^2(1-k^2)$  に注意して

$$\begin{aligned} a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta &= a^2 \frac{1 + (1-k^2) \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= a^2 \frac{k^2 + 2k \cos 2\phi + \cos^2 2\phi + (1-k^2) \sin^2 2\phi}{(1 + 2k \cos 2\phi + k^2)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (9) \text{ の分子} &= 1 + 2k \cos 2\phi + k^2 \cos^2 2\phi \\ &= (1 + k \cos 2\phi)^2 \end{aligned}$$

となる。他方 (6) を微分すると, (8) により

$$(1 + \tan^2 \theta) d\theta = \frac{2(k + \cos 2\phi) \cos 2\phi + 2 \sin^2 2\phi}{(k + \cos 2\phi)^2} d\phi$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{2(1 + k \cos 2\phi)}{1 + 2k \cos 2\phi + k^2} \quad ((8) \text{ による})$$

である。以上から変数変換して

$$\begin{aligned} K(a, b) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + k \cos 2\phi) \sqrt{1 + k^2 + 2k \cos 2\phi}}{a(1 + k \cos 2\phi)(1 + k^2 + 2k \cos 2\phi)} d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2(1 + k^2 + 2k \cos 2\phi)}} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ここで  $\cos 2\phi = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi$  として, (10) の分母の根号内を整理すると, その式は

$$\begin{aligned} a^2(1 + 2k + k^2) \cos^2 \phi + a^2(1 - 2k + k^2) \sin^2 \phi \\ = A^2 \cos^2 \phi + B^2 \sin^2 \phi \end{aligned}$$

であり, (10) は  $K(A, B)$  に等しい。□

#### §5. 第 2 種の完全楕円積分

3 節の  $K(k)$  に対して

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (11)$$

を第 2 種の完全楕円積分 (ルジャンドル・ヤコビの標準形) といいます。楕円の周長に現れる積分は (11) の型です。見掛けは  $K(k)$  より簡単ですが理論的にはかえって厄介です。  $a > b > 0$  として

$$E(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (12)$$

とおけば,  $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  として (12) =  $\frac{E(k)}{a}$  です。

以下前節までの記号をそのまま使います。

**定理 4**  $a, b$  の相加平均を  $a_1$ , 相乗平均を  $b_1$  とすると

$$E(a, b) = 2E(a_1, b_1) - b_1^2 K(a_1, b_1) \quad (13)$$

**証明の方針** 前節と同様にランデンの変換(6)により、(7)を活用して

$$2E(a, b) - b^2K(a, b) = E(A, B) \quad (14)$$

を示せばよいはずですが。しかし(14)の左辺を直接に計算しても右辺にはなりません。そこでずい(?)手段ですが、(14)の左辺に

$$0 = -2ak \int_0^\pi \cos \theta d\theta \quad (15)$$

という項を加えて計算します。cos θ は(8')を使います。その計算は節を改めて行います。

## §6. 定理4の証明とさらなる結果

E, K の積分を 0 から π までの半分と書き下し、4 節の諸式(8'), (9)を活用すると、(14)の左辺+(15)は次のようになる。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{2a(1+k \cos 2\phi)^2}{(1+2k \cos 2\phi+k^2)^{3/2}} - \frac{a(1-k^2)}{(1+2k \cos \phi+k^2)^{1/2}} + \frac{2ak(1+\cos 2\phi)(k+\cos 2\phi)}{(1+2k \cos 2\phi+k^2)^{3/2}} \right] d\phi$$

$$= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta}{(1+2k \cos 2\phi+k^2)^{3/2}} d\phi \quad (16)$$

ここで分子の Δ は長い式だが、

$$P = 1 + k \cos 2\phi, \quad Q = k \cos 2\phi + k^2$$

とおくと、最終的に次のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} \Delta &= 2P^2 - (P-Q)(P+Q) + 2PQ \\ &= P^2 + 2PQ + Q^2 = (P+Q)^2 \\ &= (1+2k \cos 2\phi+k^2)^2 \end{aligned}$$

したがって(16)の被積分関数は a を入れて

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{a^2(1+2k \cos 2\phi+k^2)}}{\sqrt{a^2(1+k)^2 \cos^2 \phi + a^2(1-k)^2 \sin^2 \phi}} \\ &= \frac{\sqrt{A^2 \cos^2 \phi + B^2 \sin^2 \phi}}{\sqrt{A^2 \cos^2 \phi + B^2 \sin^2 \phi}} \end{aligned}$$

と変形され、(16) = E(A, B) である。□

**定理5** 1 節の記号(2)により

$$E(a, b) = \left( a^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) K(a, b) \quad (17)$$

**証明**  $a_0 = a, b_0 = b$  として  $a_n, b_n$  を作り

$$S_n = \frac{E(a_n, b_n)}{K(a_n, b_n)} - a_n^2$$

とおく。(  $a_n, b_n$  ) に対する定理3と定理4により

$b_{n+1}^2 = a_n b_n$  に注意して

$$\begin{aligned} S_n - 2S_{n+1} &= -a_n^2 + 2a_{n+1}^2 - a_n b_n \\ &= 2a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) = -2a_{n+1}c_{n+1} \end{aligned}$$

をえる。最後は  $-c_n^2$  の半分に等しい。これに  $2^n$  を掛けて  $n=0, 1, \dots, m$  について加えると

$$S_0 - 2^{m+1}S_{m+1} = - \sum_{n=0}^m 2^{n-1}c_n^2 \quad (18)$$

である。定理1により右辺は(かなり速く)収束する。そして被積分関数の評価から ( $n \rightarrow \infty$  のとき)

$$b_n^2 < \frac{E(a_n, b_n)}{K(a_n, b_n)} < a_n^2$$

$$|S_n| < a_n^2 - b_n^2 = c_n^2, \quad |2^n S_n| < 2^n c_n^2 \rightarrow 0$$

である。ゆえに(18)で  $m \rightarrow \infty$  として、 $S_0$  は右辺の無限和に等しく、書きかえれば(17)になる。□

## §7. ルジャンドルの等式

定理2と定理5により、 $K(k)$  と  $E(k)$  とを算術幾何平均によって計算できます。 $\pi$  を計算するには、両者を結ぶ次のルジャンドルの等式を使います。

$k$  の補母数を  $k' = \sqrt{1-k^2}$  とすると

$$K(k)E(k') + K(k')E(k) - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

この証明もそう難しくありません。方針は(19)の左辺が  $k$  の関数として定数であることを示すものです。

しかしかなり長くかかります。当面の  $\pi$  の計算には  $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$  の場合だけで十分なので、以下そのと

きを直接に示します。

**定理6** (19)の特別な場合であるが

$$2K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{2} \quad (20)$$

**証明** まず  $x^2 = 1 - t^2 = 1 - \sin^2 \theta$  と置換すれば

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad (21)$$

$$2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

となる。ここで次の漸化式を活用する。

**定理7**  $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} dx$  とおくと

$$J_n = \frac{n-3}{n-1} J_{n-4} \quad (n \geq 4) \quad (22)$$

**証明**  $x^n = x^{n-3}x^3$  と考えて部分積分を行うと

$$\begin{aligned} J_n &= \left[ -\frac{1}{2}x^{n-3}\sqrt{1-x^4} \right]_0^1 + \frac{n-3}{2} \int_0^1 x^{n-4}\sqrt{1-x^4} dx \\ &= \frac{n-3}{2} \int_0^1 \frac{x^{n-4} - x^n}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{n-3}{2} (J_{n-4} - J_n) \end{aligned}$$

右辺の  $J_n$  の項を左辺に加えて定数倍すればよい。□

ところで  $n$  が奇数のときは  $x^2=y$  と置換して積分でき、 $J_1=\frac{\pi}{4}$ ,  $J_3=\frac{1}{2}$  から  $J_n$  が計算できる。 $J_0$ ,  $J_2$  は初等関数では表されない(20参照)が、定理6は  $J_0J_2=2J_1J_3=\pi/4$  を意味するから、以下この等式を証明する。 $J_n$  は  $n$  とともに減少し、

$$\frac{n+3}{n+1} = \frac{J_n}{J_{n+4}} > \frac{J_n}{J_{n+3}} > \frac{J_n}{J_{n+2}} > \frac{J_n}{J_{n+1}} > 1 \quad (23)$$

だから、 $n \rightarrow \infty$  とすれば(23)の各項はすべて1に収束する。漸化式を反復すると  $m \rightarrow \infty$  のとき

$$\begin{aligned} & \frac{J_0}{J_3} \times \frac{1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 14 \cdots (4m-3)(4m+2)}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12 \cdots (4m-1)4m} \\ &= \frac{J_{4m}}{J_{4m+3}} \rightarrow 1 \\ & \frac{J_1}{J_2} \times \frac{2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 13 \cdots (4m-2)(4m+1)}{4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 11 \cdots 4m(4m-1)} \\ &= \frac{J_{4m+1}}{J_{4m+2}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

である。分母・分子それぞれは発散するが、積の順序を変えて両者を比較すると  $\frac{J_0}{J_3} = \frac{2J_1}{J_2}$  を得る。□

この証明は  $\sin^n \theta$  の積分からウォリスの公式を導く方法の類似と考えられます。

### §8. 算術幾何平均による円周率の計算

以上を総合すると、次のような算法になります。

I.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  を  $x^{-2}-2=0$  へのニュートン法として

$$x_0=1, x_{n+1}=\frac{3x_n}{2}-x_n^3$$

の反復によって、十分の桁数を求める。

II.  $\text{ag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=d$  を直接に計算する。併せて

$$s=1-\frac{k^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2=\frac{3}{4}-\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2$$

$$c_n=a_{n-1}-a_n, \text{ (和は適当な項まで)}$$

を計算する。平方根はIの変形による。

III. ルジャンドルの等式  $\left(k=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  のときにより

$$\pi = \frac{2d^2}{2s-1} = \frac{d^2}{s-\frac{1}{2}} \quad (24)$$

として計算できる。

$$\text{前述の結果から } K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2d}, E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{s\pi}{2d}$$

であり、(20)から(24)が出ます。

平方根をIのように逆数の平方根の形で計算するのは、除法を避けて多倍長数の乗法(このほうが速い)だけで済ませる工夫です。そうすれば多倍長数の除法は最後のIIIだけで済みます。

実際には最後の  $s-\frac{1}{2}$  を最初から補正し  $s=\frac{1}{4}$  から始めます。全体の手順は次のようになります。

0° 初期設定  $a \leftarrow 1, b \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$  (予め計算),  $s \leftarrow \frac{1}{4}$ ,

$t \leftarrow 1, \varepsilon$  (許容誤差) を入力。

1°  $a-b > \varepsilon$  である間、次の反復を繰り返す。

$$y \leftarrow \frac{a+b}{2}, c \leftarrow a-y, b \leftarrow \sqrt{ab}, a \leftarrow y,$$

$$s \leftarrow s-t \times c^2, t \leftarrow 2 \times t$$

2° 最後に  $\frac{ab}{s}$  (または  $\frac{(a+b)^2}{4s}$ ) を求める。

ほんのひな形ですが(10桁計算できる)電卓で最初のほうを計算したら次の表のようになりました。

( $\pi$  の欄は近似値)

$n$	0	1	2
$a$	1.000000000	0.853553391	0.847224903
$b$	0.707106781	0.840896415	0.847201267
$c$	0.707106781	0.146446610	0.006328488
$s$	0.250000000	0.228553391	0.228473292
$\pi$	2.914213563	3.140879246	3.141592635

$n=3$  では正確に計算すると19桁正しい値が得られます。収束が非常に速いのがおわかりでしょう。

実際に例えば1兆桁計算するには、最初から1兆桁の計算を要します。そのために多倍長数の乗法を高速に実行することや、記憶装置をうまく使ってデータの転送回数を減らす工夫が本質的です。

### §9. むすび

以上は計算の原理とそのための式の証明をただけです。もう少し掘り下げるには楕円積分の立ち上った議論がいります。コンピュータへの実装にもいろいろ課題があります。しかし算術幾何平均によって円周率を高精度計算する方法の説明をしました。少し難しいが微分積分学の応用例として眺めるのも無益ではないと信じます。

(京都大学名誉教授)