階乗と平方数・立方数についての一考察
－場合の数と整数の性質を連携する－

にしもと　のりよし
西元　教善

§0. はじめに

自然数 n の階乗 $n!$ を扱うとき，教科書には次のように $n=1$ から $n=10$ までの n に対する $n!$ の値が載せてある。

$1!=1$	$6!=720$
$2!=2$	$7!=5040$
$3!=6$	$8!=40320$
$4!=24$	$9!=362880$
$5!=120$	$10!=3628800$

このとき，n と $n!$ の末位までに並ぶ 0 の個数の関係や n と $n!$ の桁数の関係に目が向くが，それ以外にも興味・関心を引くことがある。例えば，

$6!=720,\ 5!=120,\ 4!=24$

であるから，

$$\frac{5!}{4!}=\frac{120}{24}=5,\ \frac{6!}{5!}=\frac{720}{120}=6$$

であるが，これは一般に $n!=n(n-1)!$ であるから，$\dfrac{n!}{(n-1)!}=n$ ということである。

次に，$m>n$ のとき $\dfrac{m!}{n!}$ を考えるとき，$m=n+4$ のときには $\dfrac{(n+4)!}{n!}$ となるが，

$n=1,\ 2,\ 3$ のとき

$$\frac{5!}{1!}=\frac{120}{1}=120$$

$$\frac{6!}{2!}=\frac{720}{2}=360$$

$$\frac{7!}{3!}=\frac{5040}{6}=840$$

である。

$\sqrt{120}=10.954\cdots$ であるが $\sqrt{121}=11$,
$\sqrt{360}=18.973\cdots$ であるが $\sqrt{361}=19$,
$\sqrt{840}=28.982\cdots$ であるが $\sqrt{841}=29$ である。

つまり，

$$\frac{5!}{1!}+1=120+1=121=11^2$$

$$\frac{6!}{2!}+1=360+1=361=19^2$$

$$\frac{7!}{3!}+1=840+1=841=29^2$$

であり，$\dfrac{5!}{1!}+1,\ \dfrac{6!}{2!}+1,\ \dfrac{7!}{3!}+1$ はすべて平方数である。

本稿では，このような階乗と平方数・立方数の関係を考察する。

§1. $\dfrac{(n+4)!}{n!}+1$（n は自然数）は平方数であること

n を自然数とする。このとき $\dfrac{(n+4)!}{n!}+1$ が平方数であることを証明しよう。

〔証明〕

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+4)!}{n!}+1\\
&=\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!}{n!}+1\\
&=(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)+1\\
&=\{(n+4)(n+1)\}\{(n+3)(n+2)\}+1\\
&=(n^2+5n+4)(n^2+5n+6)+1\\
&=\{(n^2+5n)+4\}\{(n^2+5n)+6\}+1\\
&=(n^2+5n)^2+10(n^2+5n)+24+1\\
&=(n^2+5n)^2+10(n^2+5n)+25\\
&=\{(n^2+5n)+5\}^2\\
&=(n^2+5n+5)^2
\end{aligned}$$

n は自然数であるから，n^2+5n+5 も自然数である。

よって，$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)+1$ は平方数である。

したがって，$\dfrac{(n+4)!}{n!}+1$ は平方数である。　■

さて，§0. で，$\frac{5!}{1!}+1=11^2$，$\frac{6!}{2!}+1=19^2$，

$\frac{7!}{3!}+1=29^2$ ということを示したが，

$\frac{(n+4)!}{n!}+1=(n^2+5n+5)^2$ であるから，

これらは，

$$\frac{5!}{1!}+1=(1^2+5\times1+5)^2=11^2$$

$$\frac{6!}{2!}+1=(2^2+5\times2+5)^2=19^2$$

$$\frac{7!}{3!}+1=(3^2+5\times3+5)^2=29^2$$

ということである。

> **定理 1**　n を自然数とするとき，$\frac{(n+4)!}{n!}+1$ は常に平方数である。
>
> 実際，$\frac{(n+4)!}{n!}+1=(n^2+5n+5)^2$ である。

なお，

$$\begin{aligned}&(n^2+5n+5)^2-1\\&=\{(n^2+5n+5)+1\}\{(n^2+5n+5)-1\}\\&=(n^2+5n+6)(n^2+5n+4)\\&=(n+3)(n+2)(n+4)(n+1)\\&=(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\\&=\frac{(n+4)!}{n!}\end{aligned}$$

である。

§2. $2\frac{(n+2)!}{n!}+1$（n は自然数）は 2 つの平方数の和であること

これに関連して，事前に，

$$\frac{(n+2)!}{n!}+n+2=(n+2)^2$$

$$\frac{(n+2)!}{n!}-n-1=(n+1)^2$$

であることを証明しておく。

$\frac{(n+2)!}{n!}+n+2=(n+2)^2$ ……① であること

〔**証明**〕 $\frac{(n+2)!}{n!}+n+2$

$$\begin{aligned}&=(n+2)(n+1)+n+2\\&=(n+2)\{(n+1)+1\}\\&=(n+2)^2\end{aligned}$$

■

$\frac{(n+2)!}{n!}-n-1=(n+1)^2$ ……② であること

〔**証明**〕 $\frac{(n+2)!}{n!}-n-1$

$$\begin{aligned}&=(n+2)(n+1)-(n+1)\\&=\{(n+2)-1\}(n+1)\\&=(n+1)^2\end{aligned}$$

■

①＋② より，

$$\begin{aligned}&\frac{(n+2)!}{n!}+n+2+\frac{(n+2)!}{n!}-n-1\\&=(n+2)^2+(n+1)^2\end{aligned}$$

よって，$2\frac{(n+2)!}{n!}+1=(n+1)^2+(n+2)^2$

これより，$2\frac{(n+2)!}{n!}+1$ は 2 つの平方数，しかも連続する 2 つの自然数の平方の和と表せる。

$n=1$ のとき　$2\cdot3!+1=2^2+3^2$

$n=2$ のとき　$\frac{2\cdot4!}{2!}+1=3^2+4^2=5^2$

$n=3$ のとき　$\frac{2\cdot5!}{3!}+1=4^2+5^2$

$n=4$ のとき　$\frac{2\cdot6!}{4!}+1=5^2+6^2$

である。

> **定理 2**　n を自然数とするとき，$2\frac{(n+2)!}{n!}+1$ は常に 2 つの平方数の和に表せる。
>
> 実際，$2\frac{(n+2)!}{n!}+1=(n+1)^2+(n+2)^2$ である。

これに関連して，$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2(k+1)!}{k!}+1\right\}$ を考察してみる。定理 2 から，$2\frac{(k+2)!}{k!}+1=(k+1)^2+(k+2)^2$

であるから，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2(k+1)!}{k!}+1\right\}\\&=(2^2+3^2)+(3^2+4^2)+(4^2+5^2)+\\&\quad\cdots\cdots+\{n^2+(n+1)^2\}+\{(n+1)^2+(n+2)^2\}\\&=2^2+2\{3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+(n+1)^2\}+(n+2)^2\\&=2^2+2\{\sum_{k=1}^{n}k^2-(1^2+2^2)+(n+1)^2\}+(n+2)^2\\&=4+2\sum_{k=1}^{n}k^2-10+2(n+1)^2+(n+2)^2\\&=2\sum_{k=1}^{n}k^2-6+2n^2+4n+2+n^2+4n+4\\&=2\sum_{k=1}^{n}k^2+3n^2+8n\end{aligned}$$

ここで,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2(k+1)!}{k!}+1\right\}=2\sum_{k=1}^{n}k^2+3n^2+8n$ を得る。

さらに計算を続けると，$\sum$ 公式から，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2(k+1)!}{k!}+1\right\}\\&=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n(3n+8)\\&=\frac{1}{3}n\{(n+1)(2n+1)+3(3n+8)\}\\&=\frac{1}{3}n(2n^2+12n+25)\end{aligned}$$

となるので，結局，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2(k+1)!}{k!}+1\right\}\\&=2\sum_{k=1}^{n}k^2+3n^2+8n\\&=\frac{1}{3}n(2n^2+12n+25)\end{aligned}$$

である。

§3. $\dfrac{(n+3)!}{n!}+n+2$ (n は自然数) は立方数であること

次に，$\dfrac{(n+3)!}{n!}+n+2$ (n は自然数) は常に立方数であることを証明する。

$$\begin{aligned}&\frac{(n+3)!}{n!}+n+2\\&=(n+3)(n+2)(n+1)+(n+2)\\&=\{(n+3)(n+1)+1\}(n+2)\\&=(n^2+4n+4)(n+2)\\&=(n+2)^2(n+2)\\&=(n+2)^3\end{aligned}$$

$n=1$ のとき　$4!+3=3^3$

$n=2$ のとき　$\dfrac{5!}{2!}+4=4^3$

$n=3$ のとき　$\dfrac{6!}{3!}+5=5^3$

$n=4$ のとき　$\dfrac{7!}{4!}+6=6^3$

である。

> **定理 3**　n を自然数とするとき，
> $\dfrac{(n+3)!}{n!}+n+2$ は常に立方数である。
>
> 実際，$\dfrac{(n+3)!}{n!}+n+2=(n+2)^3$ である。

なお，これは $\dfrac{(n+3)!}{(n+2)n!}+1=(n+2)^2$ と同じことであるから，次の系を得る。

> **系 3**　n を自然数とするとき，$\dfrac{(n+3)!}{(n+2)n!}+1$ は常に平方数である。
>
> 実際，$\dfrac{(n+3)!}{(n+2)n!}+1=(n+2)^2$ である。

§4. まとめ

左辺が階乗の商$+1$ という形に拘れば，n が自然数のとき，

・$\dfrac{(n+4)!}{n!}+1=(n^2+5n+5)^2$ は平方数

・$2\dfrac{(n+2)!}{n!}+1=(n+1)^2+(n+2)^2$ は連続する 2 つの自然数の平方の和

・$\dfrac{(n+3)!}{(n+2)n!}+1=(n+2)^2$ は平方数

というようにまとめられる。

また，${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ であるから，

$$\begin{aligned}{}_{n+4}\mathrm{P}_4&=\frac{(n+4)!}{\{(n+4)-4\}!}=\frac{(n+4)!}{n!}\\{}_{n+2}\mathrm{P}_2&=\frac{(n+2)!}{\{(n+2)-2\}!}=\frac{(n+2)!}{n!}\\{}_{n+3}\mathrm{P}_3&=\frac{(n+3)!}{\{(n+3)-3\}!}=\frac{(n+3)!}{n!}\end{aligned}$$

である。

よって，階乗の記号！を使わず順列の総数の記号 ${}_n\mathrm{P}_r$ を使えば，

・${}_{n+4}\mathrm{P}_4+1$ は平方数

・$2{}_{n+2}\mathrm{P}_2+1$ は連続する 2 つの自然数の平方の和

・$\dfrac{{}_{n+3}\mathrm{P}_3}{n+2}+1$ は平方数

というように表される。

数学Aでは，第 1 章で場合の数を，第 2 章で整数の性質を扱うが，このような題材で章間の連携を図ることは数学教育的にみて有意義であると思う。

(山口県立岩国高等学校)