分数型漸化式と１次分数変換

稲田（いなだ）　富美男（とみお）

§1. はじめに

分数型の漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}$ を，

$T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ を用いて $a_{n+1}=T(a_n)$ であると考える立場で考察する。$T(z)$ は複素数平面から複素数平面への１次分数変換（メビウス変換）である。新課程では複素数平面が復活するためこの立場で特性方程式やその解を用いた誘導の意味を考えることが可能になった。１次分数変換（メビウス変換）については参考文献〔1〕を参考にした。

§2. １次分数変換

複素数平面 C に ∞（無限遠点）を加えた集合を拡張された複素数平面といい $\widehat{C}$ で表す。

１次分数変換（メビウス変換）

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

$$(a,\ b,\ c,\ d\in C,\ ad-bc\neq 0)$$

は $\widehat{C}$ から $\widehat{C}$ の上への１対１対応の（同相）写像を与える。ただし $T(\infty)=a/c$，$T(-d/c)=\infty$ とする。

任意の１次分数変換 $T(z)$ は逆変換

$T^{-1}(z)=\dfrac{dz-b}{-cz+a}$ をもつ。１次分数変換 T, R, A について $R(z)=ATA^{-1}(Z)$ が成り立つとき，T は A により R に共役であるという。次の定理が成り立つ。

定理１　〔１〕 恒等変換でない任意の１次分数変換 $T(z)$ はある変換 A により次のどちらかに共役である。

$R(z)=\lambda z(\lambda\neq 0,\ 1)$　または

$P(z)=z+l(l\neq 0)$

定理の２つの変換は $T(z)$ の**標準形**と呼ばれる。$\alpha\in\widehat{C}$ が，恒等変換でない１次分数変換 $T(z)$ について $T(\alpha)=\alpha$ を満たすとき，α は T の**固定点**であるという。標準形 $R(z)$ は 0 と ∞ を固定点にもち，$P(z)$ は ∞ を固定点にもつ。

§3. 定理１の証明

定理は一般の１次分数変換で成り立つが，以下

a，b，c，d は実数

を仮定する。A と R は虚数の係数でもよい。

１　$c=0$ のとき，$T(z)=\lambda z+l$ とおき直せる。$\lambda=1$ ならば標準形 $P(z)$ である。$\lambda\neq 1$ であるとき $\lambda\alpha+l=\alpha$ とおくと $\alpha=\dfrac{l}{1-\lambda}$。$T(z)$ は α と ∞ を固定点にもつから $A(z)=z-\alpha$ とおくと，ATA^{-1} は 0 と ∞ を固定点にもつ。$T(z)=w$, $R(z)=\lambda z$ とおくと

$$AT(z)=w-\alpha=\lambda z+l-(\lambda\alpha+l)=\lambda(z-\alpha)$$
$$=RA(z)$$

であるから T は A により R に共役である。

２　$c\neq 0$ のとき

以下 $\varDelta=ad-bc$ とおく。固定点を α とすると $\alpha=\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ より $c\alpha^2+(d-a)\alpha-b=0$。これを解いて

$$\alpha=\frac{a-d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$$
$$=\frac{a-d\pm\sqrt{(a+d)^2-4\varDelta}}{2c}$$

以下 $D=(a+d)^2-4\varDelta$ とおく。

(1)　$D\neq 0$ のとき　２つの固定点 α, β をそれぞれ

$$\alpha=\frac{a-d+\sqrt{D}}{2c},\quad \beta=\frac{a-d-\sqrt{D}}{2c}$$

とおく。$T(z)=w$ とおくと

$$w-\alpha=\frac{az+b}{cz+d}-\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$$
$$=\frac{(z-\alpha)\varDelta}{(cz+d)(c\alpha+d)} \qquad (3,\ 1)$$

α を β におきかえた式と比をとると

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta}=\lambda\frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad (3,\ 2)$$

ただし

$$\lambda=\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}=\frac{a+d-\sqrt{D}}{a+d+\sqrt{D}} \qquad (3,\ 3)$$

である。$A(z)=\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$，$R(z)=\lambda z$ とおくと (3，2) は $AT=RA$ を意味しており，T は A により R に共役である。$\lambda\neq 0$，1 よりこの場合も定理が成り立つ。

(2) $D=0$ のとき $(a+d)^2=4\Delta\neq 0$

$\alpha=\dfrac{a-d}{2c}$ より $c\alpha+d=\dfrac{a+d}{2}$ かつ

$cz+d=c(z-\alpha)+\dfrac{a+d}{2}$ これらを (3，1) に代入し逆数をとると

$$\frac{1}{w-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+l \qquad (3,\ 4)$$

ただし $l=\dfrac{2c}{a+d}\neq 0$ とおいた。$A(z)=\dfrac{1}{z-\alpha}$，$P(z)=z+l$ として(1)の場合と同様 T は A により P に共役である。

§4．1次分数変換の分類

T の標準形が $R(z)=\lambda z$ で $\lambda>0$，$\lambda\neq 1$ のとき T は**双曲型**，$|\lambda|=1$ のときは**楕円型**という。$|\lambda|\neq 1$ のときは**斜航的**といい双曲型を含む。T の標準形が $P(z)=z+l(l\neq 0)$ であるとき，T は**放物型**という。

Δ と D の値で T の型が判定できる。

(1) $\Delta>0$ のとき

① $D=(a+d)^2-4\Delta>0$ なら $(a+d-\sqrt{D})(a+d+\sqrt{D})=4\Delta>0$ より $\lambda=\dfrac{a+d-\sqrt{D}}{a+d+\sqrt{D}}>0$ かつ $\lambda\neq 1$。よって双曲型である。

② $D<0$ のとき，(3，3) の分母と分子は互いに共役な複素数なので $|\lambda|=1$ となり楕円型である。

③ $D=0$ のときは上記(1)より放物型である。

(2) $\Delta<0$ のとき $D=(a+d)^2-4\Delta>0$ である。$(a+d-\sqrt{D})(a+d+\sqrt{D})=4\Delta<0$ より $\lambda<0$ である。$\lambda=-1$ の時は楕円型で，$\lambda\neq -1$ なら双曲型でない斜航的な変換である。

§5．漸化式の解法への応用

分数型の漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}$ を，

$T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ を用いて $a_{n+1}=T(a_n)$ と表す時，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $n-1$ 個の T の合成と初項 a_1 により $a_n=T^{n-1}(a_1)$ で求められる。

$T^{n-1}=(A^{-1}RA)^{n-1}=A^{-1}R^{n-1}A$ より

$AT^{n-1}=R^{n-1}A$ であるから次の定理が成り立つ。ただし漸化式の型を $T(z)$ の型で呼ぶことにする。

定理 2　分数型の漸化式は次の等式を a_n について解いて一般項が得られる。

$\boxed{1}$ $c=0$ のとき $a_n-\alpha=\lambda^{n-1}(a_1-\alpha)$ (5，0)

$\boxed{2}$ $c\neq 0$ のとき

(1) 斜航的・双曲型，楕円型 ($D\neq 0$) のとき固定点 α，β について

$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\lambda^{n-1}\dfrac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}$　ただし

$$\lambda=\frac{a+d-\sqrt{D}}{a+d+\sqrt{D}} \qquad (5,\ 1)$$

(2) 放物型 ($D=0$) のとき

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2c(n-1)}{a+d} \qquad (5,\ 2)$$

例 1　(**双曲型**)　$a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}$

$D=4$ かつ $\alpha=1$，$\beta=-1$ であるから (5，1) より

$\dfrac{a_n-1}{a_n+1}=\dfrac{1}{3^{n-1}}\cdot\dfrac{0-1}{0+1}$，つまり $a_n=\dfrac{3^{n-1}-1}{3^{n-1}+1}$。

(注意)　2つの固定点をもつとき，一方の α について $A(z)=\dfrac{1}{z-\alpha}$ とおくと $A(\alpha)=\infty$ であるから $ATA^{-1}(z)$ は無限遠点を固定点とし $c=0$ の場合となる。

例 2　(**放物型**)　$a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}$

$D=0$ かつ $\alpha=2$ (重解) である。(5，2) より

$\dfrac{1}{a_n-2}=\dfrac{1}{-2}+(n-1)$　であるから $a_n=\dfrac{4n-4}{2n-3}$

(注意)　放物型の時は一般項が n についての1次分数式になる。つまり分母・分子が等差数列になっているので推定により求め，数学的帰納法で証明することもできる。

§6. 循環する解をもつ分数型漸化式

恒等変換でない１次分数変換 $T(z)$ に対し $T^n(z)=z$ となる自然数 n があるとき**位数が有限**であるといい，最小の $\boldsymbol{n}$ を T の**位数**という。$T(z)$ の標準形を $R(z)$ とすると，$R^n=AT^nA^{-1}$ より T の位数が有限ならば $\lambda^n=1$ であるから，$T(z)$ は楕円型である。

楕円型であるとき，(3, 3) より

$2\mathrm{Re}\lambda+2=\dfrac{(a+d)^2}{\varDelta}$　　一方 $\lambda=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，半角の公式より $2\mathrm{Re}\lambda+2=2\cos\theta+2=4\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

であるから

$$0\leqq 4\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{(a+d)^2}{\varDelta}<4 \qquad (6,\ 1)$$

が成り立つ。

位数が有限になる条件を５つ挙げる。

【１】 $a+d=0$ なら位数２である。

証明 $a+d=0$ なら $D=-\varDelta\neq 0$ より放物型ではない。

(3, 3) より $\lambda=-1$ であるから $\lambda^2=1$ より位数２である。

【２】 $T(z)$ が楕円型で $\varDelta=ad-bc<0$ なら位数が２かつ $a+d=0$ である。

証明 $\varDelta<0$ であるとき，§４の(2)と $T(z)$ が楕円型であることより $\lambda=-1$ である。よって位数２かつ $a+d=0$。

【３】 $T(z)$ が楕円型で $\varDelta=1$ かつ $a+d$ が整数のとき位数は２または３である。

証明 $T(z)$ が楕円型より $D=(a+d)^2-4\varDelta<0$。これを満たす $a+d$ の整数値は０または ± 1 である。$a+d=0$ の時は位数２。$a+d=\pm 1$ のとき (6, 1) より $\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\dfrac{1}{2}$。$0\leqq\theta<2\pi$ とすると，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$ である。どちらの場合も $\lambda^3=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=1$ より位数は３である。

【４】 $\varDelta=2$ かつ $(a+d)^2=4$ なら位数は４

証明 $D=(a+d)^2-4\varDelta<0$ より $T(z)$ は楕円型である。したがって，(6, 1) より $4\cos^2\dfrac{\theta}{2}=2$。つまり $\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{2}$。いずれの場合にも $\lambda^4=1$ かつ $\lambda^2\neq 1$ より位数は４である。

【５】 $\varDelta=3$ かつ $(a+d)^2=9$ なら位数は６

証明 $D=(a+d)^2-4\varDelta<0$ より $T(z)$ は楕円型である。(6, 1) より $4\cos^2\dfrac{\theta}{2}=3$ であるから，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5\pi}{3}$。いずれの場合も $\lambda^6=1$，$\lambda^2\neq 1$，$\lambda^3\neq 1$ より位数は６である。

例３ （**楕円型【３】**） $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{3a_n-2}$

$a_1=1$，$a_2=0$，$a_3=\dfrac{1}{2}$，$a_4=1$，$a_5=0$，…となり循環するので数学的帰納法で証明する。

§7. おわりに

(1) 〔２〕によると，分数型の漸化式で表される数列において，分母に０の項が現れないように初項をとる必要がある。

つまり，ある n について $a_n=\infty$ となる初項は除く。

斜航的・双曲型，楕円型のとき (5, 1) で $a_n=\infty$ とおくと

$$a_1=\frac{\alpha\lambda^{n-1}-\beta}{\lambda^{n-1}-1} \text{ より } \quad a_1\neq\frac{\alpha\lambda^{n-1}-\beta}{\lambda^{n-1}-1}$$

であればよい。

放物型のとき (5, 2) において $a_n=\infty$ とおくと

$$a_1=\alpha-\frac{a+d}{2c(n-1)} \text{ より } a_1\neq\alpha-\frac{a+d}{2c(n-1)}$$

である。

実数係数のとき，１次分数変換は実数に無限遠点を加えた集合から同じ集合の上への１対１の写像なので上記以外の点は除かなくてよい。

(2) 〔１〕によると，１次分数変換は図形的にも美しい性質をもっており，漸化式への応用は１次分数変換の有用性のうちのほんの一部分にすぎない。

《参考文献》

〔１〕 谷口雅彦・奥村善英著　双曲幾何学への招待　1996 年　培風館

〔２〕 石濱文武　１次分数漸化式の初期値について　数研通信 52 号 2005 年５月

（兵庫県立加古川南高校）