円と放物線の縁

松田（まつだ）　康雄（やすお）

§0. はじめに

円と放物線に関して次のような問題を考えた。

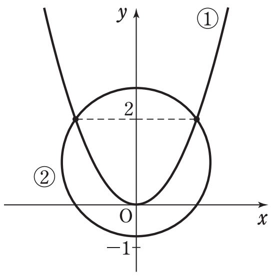
> **問題 1**　放物線 $y=x^2$ …① と円 $x^2+(y-1)^2=3$ …② の交点の座標を求めよ。

解答　①と②から x を消去して

$y^2-y-2=0$ より $(y-2)(y+1)=0$,

$y=2,\ -1$

①より $y\geqq 0$ なので $y=2$　交点は $(\sqrt{2},\ 2)$ と $(-\sqrt{2},\ 2)$



ここで次の疑問がわいた。

〔疑問〕　方程式の解でありながら，図には出てこない $y=-1$ の図形的な意味は何か。

本稿ではこの疑問をきっかけに考えたことを書いた。

§1. 円と放物線が交わるとき

はじめの疑問に関して，次の様な問題を連想する。

> **問題 2**　無理関数 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x-2$ の交点の座標を求めよ。

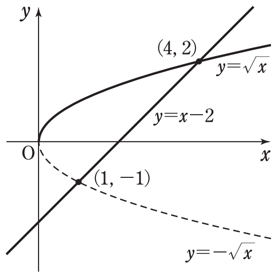
解答　$\sqrt{x}=x-2$ …③ とおき，両辺を 2 乗して

$x^2-5x+4=0$ …④　$(x-1)(x-4)=0$ より

$x=1,\ 4$

③の左辺は 0 以上なので $x\geqq 2$ でなければならない。よって，$x=4$ より交点の座標は $(4,\ 2)$ である。

$x=1$ は方程式の解でありながら図には出てこない。かつては「無縁根」と言われていたものである。



これは無理関数 $y=-\sqrt{x}$ と直線 $y=x-2$ の交点の x 座標である。$-\sqrt{x}=x-2$ とおき，両辺を 2 乗すると方程式④が得られる。$x\leqq 2$ でなければならないので，$x=1$ となる。

問題 2 を手掛かりに，問題 1 とその疑問に関して次の定理が得られる。

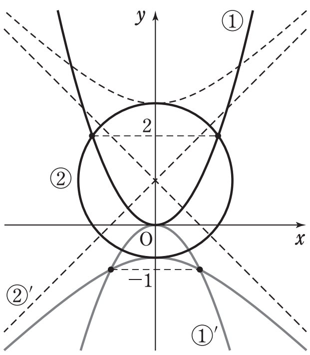
> **定理 1**　放物線 $y=x^2$ …⑤ と円 $x^2+(y-a)^2=r^2$ …⑥　および放物線 $y=-x^2$ …⑤′ と双曲線 $-x^2+(y-a)^2=r^2$ …⑥′ (a, r は定数) の共有点の y 座標はそれぞれ方程式
>
> $$y^2-(2a-1)y+a^2-r^2=0 \qquad ⑦$$
>
> の 0 以上，0 以下の解である。

定理 1 から，はじめの疑問の答は次のように言える。

放物線 $y=x^2$ …① と 円 $x^2+(y-1)^2=3$ …② の共有点の y 座標は，y の 2 次方程式

$$y^2-y-2=0,\ (y-2)(y+1)=0 \qquad ⑧$$

の 0 以上の解 $y=2$ である。放物線 $y=-x^2$ …①′ と双曲線 $-x^2+(y-1)^2=3$ …②′ の共有点の y 座標が，⑧の 0 以下の解 $y=-1$ である。



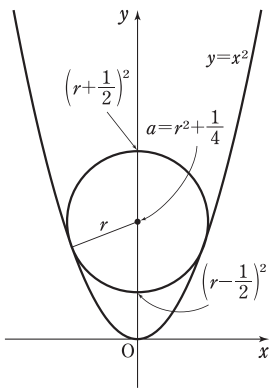
なお，双曲線⑥′の漸近線の方程式は $y=\pm x+a$，頂点の座標は $(0,\ a\pm r)$ である。したがって，双曲線⑥′は，円⑥の中心を通る傾き ± 1 の 2 直線を漸近線とし，その頂点で円⑥と接する。

§2. 円と放物線が接するとき

次に，放物線⑤と円⑥が接するときを考える。このとき，方程式⑦は 0 以上の重解をもつ。方程式⑦の判別式を D とおくと，

$$D=(2a-1)^2-4(a^2-r^2)=0 \text{ より}$$

$$a=r^2+\frac{1}{4}$$



が成り立つ。このとき，重解は

$$y=\frac{2a-1}{2}=r^2-\frac{1}{4}$$

となる。したがって，$r\geqq\frac{1}{2}$ のとき放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+\left(y-r^2-\frac{1}{4}\right)^2=r^2$ …⑨ は，点 $\left(\pm\sqrt{r^2-\frac{1}{4}},\ r^2-\frac{1}{4}\right)$ で接する。

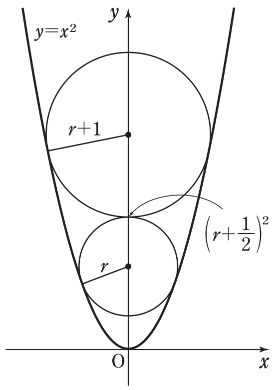
特に $r=\frac{1}{2}$ として，次の定理が示される。

> **定理 2**　放物線 $y=x^2$ と半径 $\frac{1}{2}$ の円
>
> $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ は原点で接する。

円⑨と y 軸との交点の y 座標は，上下それぞれ

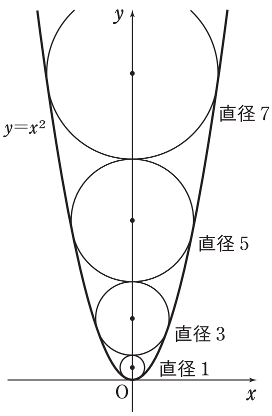
$$a\pm r=r^2+\frac{1}{4}\pm r=\left(r\pm\frac{1}{2}\right)^2$$

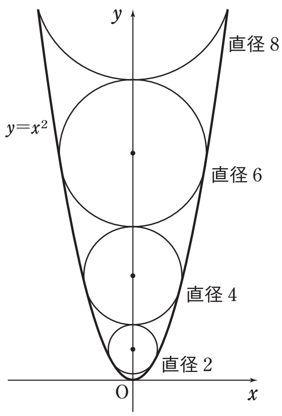
（複号同順）



となる。また，y 軸上に中心をもち，放物線 $y=x^2$ に接する半径 $r+1\left(r\geqq\frac{1}{2}\right)$ の円 …⑩ と y 軸の下の交点の y 座標も $\left(r+\frac{1}{2}\right)^2$ となる。したがって，2 円⑨，⑩は外接する。

このことと定理 2 から図のように，放物線の中にきれいな直径の円が並ぶことが示される。





§3. おわりに

放物線と円の間の縁について少しは見えてきた。x を消去して y の 2 次方程式を考えるのがポイントだと思う。そして，放物線 $y=x^2$ の中にきれいな直径の円が並ぶのは不思議で面白いと感じる。今後，図形的な意味やこの性質を利用した問題を考えたい。

《参考文献・参考資料》

〔1〕 NPO 和算，平成 20 年度第 11 回算額をつくろうコンクール特別賞受賞作，2009.

〔2〕 2012 年 名古屋市立大学の入試問題，旺文社，2013 年受験用全国大学入試問題正解数学（国公立大編）

（久留米工業高等専門学校）