正多面体の塗り分けについて

やまだ　かずお
山田　一男

§1. はじめに

オイラーの多面体定理が授業で扱われるようになり，多面体が身近なものとなってきた。そこで，よく話題となる正多面体の色塗りを，バーンサイドの補題を用いて計算してみた。

§2. 計算結果

k 色から何色かを使って，正 n 面体の面を塗る塗り方の総数は以下の $f(n,\ k)$ で表される。

$$f(4,\ k)=\frac{k^2(k^2+11)}{12}$$

$$f(6,\ k)=\frac{k^2(k+1)(k^3-k^2+4k+8)}{24}$$

$$f(8,\ k)=\frac{k^2(k^6+17k^2+6)}{24}$$

$$f(12,\ k)=\frac{k^4(k^8+15k^2+44)}{60}$$

$$f(20,\ k)=\frac{k^4(k^{16}+15k^6+20k^4+24)}{60}$$

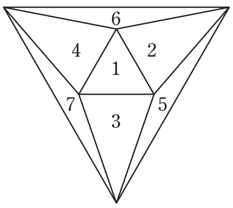
また，これから次もわかる。

ちょうど r 色での正 n 面体の塗り方の総数は

(☆)　$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i{}_r\mathrm{C}_i\cdot f(n,\ r-i)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}{}_r\mathrm{C}_i\cdot f(n,\ i)$

である。ただし，$1\leqq r\leqq m$ とする。

§3. 計算の過程



例として，正八面体の場合を実際に書き出して，$f(8,\ k)$ を求める。

左の図は，正八面体を平面上に置いたとき，真上の面を 1，真下になって見えない面を 8 とし，サイコロと同じように，対する面の番号の和が 9 となるように割振ったものとする。面の置換群の元は以下である。

①　1 が 1 に写るもの：3 個

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)，(1)(8)(243)(567)，(1)(8)(234)(576)

②　1 が 2，3，4 に写るもの：3×3＝9 個

(12)(36)(45)(78)，(1253)(4687)，(1264)(3587)

(13)(27)(45)(68)，(1352)(4786)，(1374)(2586)

(14)(27)(36)(58)，(1462)(3785)，(1473)(2685)

③　1 が 5，6，7 に写るもの：3×3＝9 個

(15)(23)(48)(67)，(2)(7)(156)(384)，(3)(6)(157)(284)

(16)(24)(38)(57)，(2)(7)(165)(348)，(3)(6)(157)(284)

(17)(28)(34)(56)，(3)(6)(175)(248)，(4)(5)(176)(238)

④　1 が 8 に写るもの：3 個

(18)(25)(36)(47)，(18)(27)(35)(46)，(18)(26)(37)(45)

以上がすべてである。したがって，k 色までの色を使って正八面体を塗る場合，各置換で不変な塗り方の総数は①からそれぞれ順に

①k^8，k^4，k^4　②k^4，k^2，k^2　③k^4，k^4，k^4　④k^4，k^4，k^4

k^4，k^2，k^2　　k^4，k^4，k^4

k^4，k^2，k^2　　k^4，k^4，k^4

であるから，バーンサイドの補題より，その塗り方の総数 $f(8,\ k)$ は

$$f(8,\ k)=\frac{1}{24}(1\cdot k^8+17\cdot k^4+6\cdot k^2)=\frac{k^2(k^6+17k^2+6)}{24}$$

と得られる。

§4. おわりに

正八面体を 8 色や 7 色で塗る場合ならともかく，6 色や 5 色でとなると，色付けした正八面体をイメージしづらい，面の数が増えればさらにイメージしづらい。そこで群論を用いると，単純な計算で結果が得られることを話題にすることで，数学に対する生徒の関心が高まればと思う。

なお，辺を共有する面は違う色で塗るという条件の下では，各置換で不変な塗り方の総数は (☆) と同じ方針で計算できるが，いざ実行するとなると大変である。今後の自分自身の宿題としたい。

（愛知県立五条高等学校）