●数研通信 70 号を読んで●

「n と $2n$ の間に素数がある」の証明を考える

－ベルトラン・チェビシェフの定理のより強い評価による証明－

とちおり しげのり
栃折 成紀

§1. はじめに

ベルトラン・チェビシェフの定理

全ての自然数 n に対して，$n<p\leqq 2n$ を満たす素数 p が存在する。

この定理は，1845 年にベルトラン (仏) が予想として発表し，チェビシェフ (露) がガンマ関数を使って証明，ポール・エルデシュ (ハンガリー，1913－1996) が高校生の時初等的に証明したと言われています。

エルデシュのアイディアによる証明がインターネット上のとある日本語サイトに書かれており，私はそれを理解したつもりになっていました。証明の方針は次の通りです。

(背理法)

① あるnに対して，$n<p\leqq 2n$ を満たす素数 p が存在しないと仮定する

② n の不等式を導き，それが $n\geqq 2^9$ (＝512) では成り立たないことを示す

③ $n<512$ では p が存在することが，手計算により確認できる (⇒ 矛盾)

ところが，私がその証明を理解した 2，3 ヵ月後の 2011 年 5 月，「数研通信」70 号「n と $2n$ の間に素数がある」(一松信，以下敬称略) が掲載され，より簡潔な証明になっていることに私はたいへん驚きました。一松の証明では，導いた不等式が成り立たない n の最小値 (「限界値」) を $2^7=128$ まで下げています。一松の評価式をよく読むと，ぎりぎりの評価で巧みに導いていることがわかりました。一方で，「限界値」は 128 はまだ大きく，少しでも工夫して下げることはできないか？一松の評価を丹念に調べ，限界値を $2^6=64$ まで下げることができたことを以下でご紹介したいと思います。

先述の一松の記事では，議論の順番を入れ替えるとより分かりやすくなるのでは？という点と，補助定理の証明において行間が省略されている点が見られるため，それらの点も含めた証明を以下に記します。

§2. 証明の流れ

以下の⑴～⑽を順に示していくことになります。

証明の流れ

$x>0$，$P(x):=(x$ 以下の素数の積$)$ とする。

⑴ $(x$ 以下の素数の個数$)<\dfrac{1}{3}x+2$

⑵ $\dfrac{P(2n-1)}{P(n)}\leqq {}_{2n-1}\mathrm{C}_n\leqq 2^{2n-2}$

⑶ $x\geqq 3$ で $P(x)<2^{2x-3}$

⑷ ${}_{2n}\mathrm{C}_n>\dfrac{2^{2n}}{n}$ $(n\geqq 4)$

⑸ $y=\dfrac{\log x}{x}$ は $x\geqq e$ で減少である。

以下，ある自然数 $n\geqq 5$ をとると，$n<p\leqq 2n$ を満たす素数 p が存在しないと仮定する。

p を ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ の素因数，a_p を p の指数とする。

⑹ $a_p=\displaystyle\sum_{i=1}^{[\log_p 2n]}\left(\left[\frac{2n}{p^i}\right]-2\left[\frac{n}{p^i}\right]\right)$

⑺ $p\leqq\dfrac{2}{3}n$

⑻ ${}_{2n}\mathrm{C}_n<(2n)^{\frac{1}{3}\sqrt{2n}+2}\times 2^{\frac{4}{3}n-5}$

⑼ $n<2^6$

⑽ 自然数 $n\leqq 63$ に対して，$n<p\leqq 2n$ を満たす素数 p が存在する。

⑼と⑽が矛盾するから，定理が成り立ちます。背理法は仮定をするところから‘ウソ’が入り込む訳ですが，‘ウソ’ではない⑴～⑸などは最初に証明しておきます。実は⑹まで正しく，⑺から本当はおか

しなことになります。

(証明)

(1) (x 以下の素数の個数)

$\leqq$(2, 3 の倍数でない x 以下の自然数の個数)$+1$

$\leqq\left(\left[\dfrac{x}{3}\right]+1\right)+1$

(等号成立は (x を 6 で割った余りの整数部分) $=1, 2, 5$)

$\leqq\dfrac{1}{3}x+2$ (等号成立は x が 3 の倍数)

ゆえに成り立つ。

(2) ${}_{2n-1}C_n=\dfrac{(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot\cdots\cdot(n+1)\cdot\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot1}$

この分子には，$n+1$ 以上 $2n-1$ 以下の全ての素数が現れ，それらは分母と約分できない。

$\therefore\ \dfrac{P(2n-1)}{P(n)}=$($n+1$ 以上 $2n-1$ 以下の素数の積)

$\leqq{}_{2n-1}C_n$

$${}_{2n-1}C_n=\frac{1}{2}\cdot2{}_{2n-1}C_n$$

$$\leqq\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n-1}{}_{2n-1}C_i\ (\because\ {}_{2n-1}C_{n-1}={}_{2n-1}C_n)$$

$$=\frac{1}{2}(1+1)^{2n-1}$$

$$=2^{2n-2}$$

ゆえに成り立つ。

(3) x が自然数 n のとき成り立つことを，n に関する数学的帰納法で示す。

$n=3, 4$ のとき，

$P(3)=6<2^3$, $P(4)=6<2^5$

ゆえに成り立つ。

$3\leqq n\leqq2m-2$ のとき成り立つと仮定する。($m\geqq3$)

$$P(2m-1)=P(m)\cdot\frac{P(2m-1)}{P(m)}$$

$<2^{2m-3}\cdot2^{2m-2}$ ($\because$ 仮定，(2))

$=2^{4m-5}=2^{2(2m-1)-3}$

$P(2m)=P(2m-1)$ ($\because$ $2m$ は素数でない)

$<2^{2(2m-1)-3}$

$<2^{2\cdot2m-3}$

ゆえに $2m-1$, $2m$ のときも成り立つ。

ゆえに $x=n$ のとき成り立つ。

$\therefore\ P(x)=P([x])<2^{2[x]-3}\leqq2^{2x-3}$

(4) n に関する数学的帰納法で示す。

$n=4$ のとき，

${}_8C_4=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$, $\dfrac{4^4}{4}=64$ から成り立つ。

$n-1$ 以下のとき成り立つと仮定する。

$${}_{2n}C_n=\frac{2n\cdot(2n-1)\cdot\cdots\cdot(n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot1}$$

$$=\frac{(2n-2)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot n}{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot1}\cdot\frac{2n\cdot(2n-1)}{n\cdot n}$$

$$=2\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot{}_{2(n-1)}C_{n-1}$$

$$>2\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{4^{n-1}}{n-1}$$

$$=2\cdot\frac{2n-1}{n-1}\cdot\frac{4^{n-1}}{n}$$

$$>2\cdot2\cdot\frac{4^{n-1}}{n}$$

$$=\frac{4^n}{n}$$

ゆえに n のときも成り立つ。

(5) $y'=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$x\geqq e$ で $1-\log x<0$ から $y'<0$

ゆえに成り立つ。

(6) ${}_{2n}C_n=\dfrac{(2n)!}{n!^2}$

$\therefore\ a_p$

$=$(($2n$)! の素因数 p の指数)

$-2\times$(n! の素因数 p の指数)

$=\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}$ ($2n$ 以下の p^i の正の倍数の個数)

$-2\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}$ (n 以下の p^i の正の倍数の個数)

$$=\sum_{i=1}^{[\log_p 2n]}\left[\frac{2n}{p^i}\right]-2\sum_{i=1}^{[\log_p n]}\left[\frac{n}{p^i}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{[\log_p 2n]}\left(\left[\frac{2n}{p^i}\right]-2\left[\frac{n}{p^i}\right]\right)$$

(7) $p>\dfrac{2}{3}n$ と仮定する。

$p\leqq2n$ であり，$n<p\leqq2n$ を満たす p は存在しないから，$\dfrac{2}{3}n<p\leqq n$

ここで，$p^2>\dfrac{4}{9}n^2>2n$ ($\because$ $n\geqq5$) から，

$[\log_p 2n]\leqq1$

$\therefore\quad a_p \leqq \left[\frac{2n}{p}\right]-2\left[\frac{n}{p}\right]$ （$\because\quad [\log_p 2n]\leqq 1$）

$=2-2\cdot 1$ $\left(\because\quad 2\leqq\frac{2n}{p}<3,\ 1\leqq\frac{n}{p}<\frac{3}{2}\right)$

$=0$　これは $a_p \geqq 1$ に矛盾。

$\therefore\quad p\leqq\frac{2}{3}n$

(8) $a_p=\sum_{i=1}^{[\log_p 2n]}\left(\left[\frac{2n}{p^i}\right]-2\left[\frac{n}{p^i}\right]\right)$

$\leqq[\log_p 2n]$ $\left(\because\quad [2x]-2[x]=\begin{cases}0 & (x-[x]<0.5)\\ 1 & (x-[x]\geqq 0.5)\end{cases}\right)$

$\leqq\log_p 2n$

$\therefore\quad p^{a_p}\leqq 2n$

特に，$p>\sqrt{2n}\Rightarrow a_p<\log_p p^2=2$

$\therefore\quad {}_{2n}\mathrm{C}_n=$(素因数が $\sqrt{2n}$ 以下の部分)$\cdot\dfrac{P\left(\frac{2}{3}n\right)}{P(\sqrt{2n})}$

$<(2n)^{\frac{1}{3}\sqrt{2n}+2}\cdot\dfrac{2^{2\cdot\frac{2}{3}n-3}}{2\cdot 3}$

（$\because$　(1)，(3)，$\sqrt{2n}>3$）

$<(2n)^{\frac{1}{3}\sqrt{2n}+2}\cdot 2^{\frac{4}{3}n-5}$

(9) (4)，(8)より $\dfrac{2^{2n}}{n}<{}_{2n}\mathrm{C}_n<(2n)^{\frac{1}{3}\sqrt{2n}+2}\cdot 2^{\frac{4}{3}n-5}$

両辺に log をとり，負の項が残らないように整理すると，

$\frac{2}{3}n\log 2<\frac{1}{3}\sqrt{2n}\log 2n+3\log\frac{n}{2}$

両辺を $\frac{3}{n}$ 倍して，以下のように減少関数のみの式にできる。

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\log\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\frac{9}{4}\cdot\frac{\log\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}+\frac{\log 2}{\sqrt{2n}}>\log 2$$

左辺を $f(n)$ とする。

(5)から $f(n)$ は $n\geqq\max\{e^2,\ 2e\}=7.3\cdots\cdots$ で減少である。

$2^6>e^2$ であり，

$f(2^6)=\sqrt{2}\cdot\frac{3\log 2}{8}+\frac{9}{4}\cdot\frac{5\log 2}{32}+\frac{\log 2}{8\sqrt{2}}$

$=\frac{45+56\sqrt{2}}{128}\log 2$

$<\frac{45+56\times 1.42}{128}\log 2$

$=\frac{124.52}{128}\log 2<\log 2$

$\therefore\quad n<2^6=64$

(10) 素数 p に値を代入していくと，満たす n が 1～63 までくまなく現れることを確認すればよい（$p=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 23,\ 43,\ 83$）。

§3. おわりに

エルデシュ・一松の証明に加えて，より評価を厳しくしたのは以下の 3 点です。

・「$P(x)<2^{2x-1}$」→「$P(x)<2^{2x-3}$」($x\geqq 3$)（(3)）

・$\dfrac{P\left(\frac{2}{3}n\right)}{P(\sqrt{2n})}<(2n)^{\frac{1}{3}\sqrt{2n}+2}\cdot 2^{\frac{4}{3}n-3}$ は，右辺を 4 で割ってもまだ成立するとしたこと（(8)の証明）

・負の項「$-3\log 2$」を切り捨てず，残したこと（(9)の証明）

結果，$\frac{124.52}{128}<1$ となり，元の証明以上に偶然の要素に支えられたと思います。限界値をさらに下げて，$2^5=32$ にしてみようと思うと筆者のやり方ではうまくいきませんでした。より強い評価式を得るために，n が 32 より遥かに大という新たな仮定が必要になってしまいます。ベルトラン・チェビシェフの定理のベストな証明は何か？と考えたときに，限界値を極力下げていった方がよいのか，それとも度を越す理論はほどほどにしておくべきなのかと考えさせられるところではあります。あるいは全く新しいアイディアがないとも限りません。読者の方で何か思いついたら，投稿など発信していただけたらと思います。

《参考文献》

〔1〕 一松信「n と $2n$ の間に素数がある」数研通信 No.70 pp.2～5

（神奈川県　日本女子大学附属高等学校）