●数研通信 70 号を読んで●

チェビシェフの定理の精密化

－n と $1.5n$ の間に素数がある－

才野瀬（さいのせ）　一郎（いちろう）

§0. はじめに

このたび，数研通信数学 No.70 の一松信先生の記事に関しまして，とても興味をもちましたので筆をとりました。チェビシェフの定理「n と $2n$ の間に素数がある」について，私自身もエルデーシュの証明等を参考にしながら考えてみたことがありますが，今回の一松先生の証明は実質わずか 3 ページ分の分量で要点をついたわかりやすいものであり，大変驚きました。

そこで，チェビシェフの定理の条件をもう少しきつくしたものを考えたので，報告します。

§1. 主題

素数に関するチェビシェフの定理「2 以上の自然数 n に対して，$n<p<2n$ を満たす素数が存在する」を少し精密化して，

「8 以上の自然数 n に対して，$n<p<1.5n$ を満たす素数 p が存在する」

ことを高校数学Ⅲ微分積分の知識を用いて示そう。

なお，議論の要点は，スターリングの公式の精度を少し落とした不等式を証明した上で，命題 8 の数列 A_n に用いるところにある。

§2. 本論

【定義 1】　p 指数

> 自然数 M を素因数分解したときの素数 p に関する因数が p^d であるとき，d を M についての『p 指数』と呼び，$v(p)=d$ と表す。

なお，M が p を素因数にもたないときは，$v(p)=0$ である。

このとき，M の素因数分解が $M=\prod_{p\leqq M} p^{v(p)}$ と表せる。

これは，M 以下のすべての素数 p にわたる $p^{v(p)}$ の積を表す。

自然対数をとると，$\log M=\sum_{p\leqq M} v(p)\cdot\log p$ と書ける。

なお，このレポートを通して，文字 p は必ず素数を表す。

【命題 1】　階乗の p 指数

> 自然数 n を素数 p による p 進展開で
> $n=a_r p^r+a_{r-1}p^{r-1}+\cdots\cdots+a_2p^2+a_1p+a_0$
> (ただし，各 j について $0\leqq a_j\leqq p-1$，$a_r\geqq 1$)
> と表すとき，$r=\left[\dfrac{\log n}{\log p}\right]$ ($\Longleftrightarrow$ $p^r\leqq n<p^{r+1}$)
> である。このとき，$M=n!$ についての p 指数は
> $$v(p)=\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{n}{p^j}\right]$$
> である。(和の上限は，r 以上であればよい。)

(証明)　$p^r\leqq n<p^{r+1}$

$$\Longleftrightarrow\ r\cdot\log p\leqq \log n<(r+1)\log p$$

$$\Longleftrightarrow\ r\leqq\frac{\log n}{\log p}<r+1\ \Longleftrightarrow\ r=\left[\frac{\log n}{\log p}\right]$$

となる。n 以下の自然数の中で，p 指数が j 以上となるものは，p 進展開したときの $(j-1)$ 次以下の係数がすべて 0 の場合であるから

$$N_j=\left[\frac{n}{p^j}\right]=a_rp^{r-j}+a_{r-1}p^{r-1-j}+a_{r-2}p^{r-2-j}+\cdots\cdots+a_{j+1}p+a_j$$

個あり，指数がちょうど j となるものは N_j-N_{j+1} 個であるから，$n!$ に関する p 指数は

$$\sum_{j=1}^{r}j(N_j-N_{j+1})=\sum_{j=1}^{r}jN_j-\sum_{j=1}^{r}jN_{j+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{r}jN_j-\sum_{j=1}^{r}(j-1)N_j=\sum_{j=1}^{r}N_j$$

(最初の等号は，$N_{r+1}=0$，2番目は，$j=1$ のとき $j-1=0$ による)。

$j>r$ のときは $\left[\dfrac{n}{p^j}\right]=0$ から和の上限は r で十分。

■

【定義2】

実数 x に対して，

$\pi(x)=$(x 以下の素数の個数)

$\theta(x)=\sum_{p\leqq x}\log p$

(p は x 以下の全ての素数 p を渡る) とおく。

なお，$\theta(2n)-\theta(n)>0$ ($n\geqq2$) がチェビシェフの定理の十分条件を与え，$\theta(1.5n)-\theta(n)>0$ ($n\geqq8$) が主題の十分条件を与えることに注意する。

また，次の細かい点を指摘しておく。

n が自然数で $n\geqq2$ のときに $2n\,(>2)$ は素数ではない。同様に，$n\geqq8$ で $1.5n$ が自然数となるときは，$1.5n\,(>3)$ は3の倍数となり素数ではない。

【命題2】 スターリングの公式(高校版)

自然数 $n\,(\geqq2)$ に対して，不等式

$$n\cdot\log n-n+1\leqq\log(n!)$$
$$\leqq n\cdot\log n-n+\log n+1$$

が成り立つ。

(証明) k を任意の自然数とする。
$k\leqq x<k+1$ のとき，$f(x)=\log k$，
$g(x)=\log(k+1)$ という2つの階段関数 $f(x)$ と $g(x)$ を定義すると，$1\leqq x\leqq n$ において
$f(x)\leqq\log x\leqq g(x)$ となるから，定積分をとって

$$\int_1^n f(x)\,dx\leqq\int_1^n\log x\,dx\leqq\int_1^n g(x)\,dx$$

ここで，

$$\int_1^n f(x)\,dx=\log1+\log2+\log3+\cdots\cdots+\log(n-1)=\log(n-1)!$$

$$\int_1^n g(x)\,dx=\log2+\log3+\log4+\cdots\cdots+\log n=\log(n!)$$

$$\int_1^n\log x\,dx=\Big[x\cdot\log x-x\Big]_1^n=n\cdot\log n-n+1$$

となるから

$$\log(n-1)!\leqq n\cdot\log n-n+1\leqq\log(n!)$$

左側の不等式の両辺に $\log n$ を加えると，
$\log(n-1)!+\log n=\log(n!)$ から
$\log(n!)\leqq n\cdot\log n-n+\log n+1$ を得る。 ■

【命題3】

実数 $x\,(\geqq0)$ に対して，

(1) $y=[2x]-2[x]=$(0 または 1)

(2) $y=[6x]+[2x]-[4x]-[3x]-[x]$
$=$(0 または 1)

(証明) 実数 x の整数部分を m，小数部分を a とする。すなわち，$m=[x]$，$a=x-[x]$ であり，$x=m+a$ と表せる。

(1) $0\leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき $y=(2m)-2m=0$，

$\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ のとき $y=(2m+1)-(2m)=1$

(2) $0\leqq a<\dfrac{1}{6}$ のとき，

$y=(6m)+(2m)-(4m)-(3m)-m=0$

$\dfrac{1}{6}\leqq a<\dfrac{1}{4}$ のとき，

$y=(6m+1)+(2m)-(4m)-(3m)-m=1$

$\dfrac{1}{4}\leqq a<\dfrac{1}{3}$ のとき，

$y=(6m+1)+(2m)-(4m+1)-(3m)-m=0$

$\dfrac{1}{3}\leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき，

$y=(6m+2)+(2m)-(4m+1)-(3m+1)-m$
$=0$

$\dfrac{1}{2}\leqq a<\dfrac{2}{3}$ のとき，

y
$=(6m+3)+(2m+1)-(4m+2)-(3m+1)-m$
$=1$

$\dfrac{2}{3}\leqq a<\dfrac{3}{4}$ のとき，

y
$=(6m+4)+(2m+1)-(4m+2)-(3m+2)-m$
$=1$

$\dfrac{3}{4}\leqq a<\dfrac{5}{6}$ のとき，

y
$=(6m+4)+(2m+1)-(4m+3)-(3m+2)-m$
$=0$

$\dfrac{5}{6}\leqq a<1$ のとき，

y
$=(6m+5)+(2m+1)-(4m+3)-(3m+2)-m$
$=1$ ■

【命題 4】

> nを自然数とするとき，
> $$N={}_{2n+1}\mathrm{C}_n=\frac{(2n+1)!}{(n+1)!\,n!}$$
> とおくと，次の不等式が成り立つ。
> (1)　$N\leqq 2^{2n}$
> (2)　$\displaystyle\prod_{n+1<p\leqq 2n+1} p\leqq N$
> (左辺は，$n+1<p\leqq 2n+1$ を満たす全ての素数pの積を表す)
> (3)　$\theta(2n+1)-\theta(n)\leqq 2n\cdot\log 2$
> (4)　$\theta(2n)-\theta(n)\leqq 2n\cdot\log 2$
> (5)　$\theta(n)\leqq 2n\cdot\log 2$

(証明)　(1)　${}_{2n+1}\mathrm{C}_n={}_{2n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ と二項定理により

$$2^{2n+1}={}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_n+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{n+1}$$
$$+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}\geqq 2N$$

両辺を 2 で割ると，$2^{2n}\geqq N$ を得る。

(2)　$n\geqq 1$ のとき，$\sqrt{2n+1}\leqq n+1$ に注意する。

$n+1<p\leqq 2n+1$ とすると，$2n+1<p^2$ となるから，Nのp指数は (命題 1 で $r=1$ の場合)

$$v(p)=\left[\frac{2n+1}{p}\right]-\left[\frac{n+1}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}\right]=1-0-0=1$$

これが結論であった。

(3)　(1), (2)から，

$$\theta(2n+1)-\theta(n+1)=\sum_{n+1<p\leqq 2n+1}\log p\leqq\log N$$
$$\leqq 2n\cdot\log 2$$

(4)　$2n+2$ は素数でない ($n\geqq 1$) から，(3)により，

$$\theta(2n+2)-\theta(n+1)=\theta(2n+1)-\theta(n+1)$$
$$\leqq 2n\cdot\log 2\leqq(2n+2)\log 2$$

となり，$n\geqq 2$ のときに不等式が成り立つことがわかる。$n=1$ のときも $\theta(2)-\theta(1)=\log 2<2\log 2$

(5)　nに関する帰納法を用いる。$n=1$，2 のとき，$\theta(1)=0<\log 2$，$\theta(2)=\log 2<2\log 2$ から不等式が成り立つ。$n=2m$ 以下の自然数については不等式が成り立つと仮定する。

$n=2m+1$，$2m+2$ のとき，まず

$$\theta(2m+1)=\{\theta(2m+1)-\theta(m+1)\}+\theta(m+1)$$
$$\leqq 2m\cdot\log 2+2(m+1)\log 2$$
$$=2(2m+1)\log 2$$

ここで，不等式は(3)と帰納法の仮定による。

次に，

$$\theta(2m+2)=\{\theta(2m+2)-\theta(m+1)\}+\theta(m+1)$$
$$\leqq 2(m+1)\log 2+2(m+1)\log 2$$
$$=2(2m+2)\log 2$$

ここで不等式は(4)と帰納法の仮定による。　■

【命題 5】

> 実数 $x\,(>0)$ に対して，$\theta(x)\leqq 2x\cdot\log 2$ が成り立つ。

(証明)　(1)　$0<x<1$ のときは (左辺)$=0<$(右辺)

$x\geqq 1$ のときは，命題 4 (5)により

$$\theta(x)=\theta([x])\leqq 2[x]\cdot\log 2\leqq 2x\cdot\log 2$$　■

【命題 6】

> 実数 $x\geqq 1$ のとき，$0\leqq\log x\leqq\frac{9}{4}\cdot\sqrt[6]{x}$ が成り立つ。

(証明)　$x\geqq 1$ において関数

$f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt[6]{x}}=x^{-\frac{1}{6}}\log x$ とおくと，

$$f'(x)=-\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}\log x+x^{-\frac{1}{6}}\cdot x^{-1}$$
$$=-\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}(\log x-6)$$

$f(x)$ は，$1\leqq x\leqq e^6$ において増加し，$e^6\leqq x$ において減少するから，$x=e^6$ のときが最大である。

$$\therefore\quad f(x)\leqq f(e^6)=\frac{6}{e}<\frac{6}{2.7}<\frac{9}{4}$$　■

【命題 7】

> 関数 $f(x)=\frac{1}{12}x-\sqrt{x}\cdot\log x-5\log x-5$ について，$x\geqq 6^6$ のとき $f(x)>0$ が成り立つ。

(証明)　$x\geqq 6^6$ のとき $f'(x)>0$，かつ $f(6^6)>0$ を示せばよい。

$$f'(x)=\frac{1}{12}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\log x-x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-1}-5\cdot x^{-1}$$
$$\geqq\frac{1}{12}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{9}{4}x^{\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{2}}-5\cdot x^{-1}$$

(∵　命題 6)

$$=\frac{1}{12}-\frac{9}{8}x^{-\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{2}}-5\cdot x^{-1}$$
$$\geqq\frac{1}{12}-\frac{9}{8}(6^6)^{-\frac{1}{3}}-(6^6)^{-\frac{1}{2}}-5\cdot(6^6)^{-1}$$

(∵　$x\geqq 6^6$)

$$=2209\times 6^{-6}>0$$

$$f(6^6)=\frac{1}{12}\times 6^6-(6^6)^{\frac{1}{2}}\log(6^6)-5\log(6^6)-5$$

$=3883-1266\log 6>0$ （∵ $\log 6<2$） ■

【命題 8】 A_n の定義と p 指数

> 自然数 $n\,(\geqq 2)$ に対して，
> $$A_n=\frac{(6n)!\times(2n)!}{(4n)!\times(3n)!\times n!}$$
> とする。
> さらに，p を任意の素数とするとき，
> $r=\left[\dfrac{\log 6n}{\log p}\right]$ （$p^r\leqq 6n<p^{r+1}$） とし，
> 分子 $(6n)!\times(2n)!$ の p 指数を u
> 分母 $(4n)!\times(3n)!\times n!$ の p 指数を w
> とおくと，次が成り立つ。
> (1) $0\leqq u-w\leqq r$
> (2) A_n は自然数である。
> (3) A_n の p 指数を v とするとき，$p^v\leqq 6n$
> すなわち，$v\cdot\log p\leqq\log 6n$
> 特に，A_n の素因数は $6n$ より小さい。
> (4) $\sqrt{6n}<p$ のとき，A_n の p 指数は 1 以下
> (5) $4n<p<6n$ のとき，A_n の p 指数は 1
> (6) $2n<p<4n$ のとき，A_n の p 指数は 0

（証明） $n\geqq 2$ より，$\sqrt{6n}<2n$ に注意する。

(1) $r=\left[\dfrac{\log 6n}{\log p}\right]$ （$p^r\leqq 6n<p^{r+1}$） とする。

p を素数とするとき，$(6n)!$ の p 指数は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{6n}{p^k}\right]$ であった。（∵ 命題 1）

同様にして，$(6n)!\times(2n)!$ の p 指数は，

$$u=\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{6n}{p^k}\right]+\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{2n}{p^k}\right]$$

$(4n)!\times(3n)!\times n!$ の p 指数は，

$$w=\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{4n}{p^k}\right]+\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{3n}{p^k}\right]+\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

ここで，命題 3 (2)を用いて

$$u-w=\sum_{k=1}^{r}\left(\left[6\frac{n}{p^k}\right]+\left[2\frac{n}{p^k}\right]-\left[4\frac{n}{p^k}\right]-\left[3\frac{n}{p^k}\right]-\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)=\sum_{k=1}^{r}（0\text{ または }1）$$

ゆえに $0\leqq u-w\leqq r$

(2) すべての素数 p に対して $u\geqq w$ より A_n は自然数となる。

(3) A_n の p 指数が $v=u-w\leqq r$ により $p^v\leqq p^r\leqq 6n$

自然対数をとると $v\cdot\log p\leqq\log 6n$

(4) $\sqrt{6n}<p$ のとき，

$$v=\left[6\frac{n}{p}\right]+\left[2\frac{n}{p}\right]-\left[4\frac{n}{p}\right]-\left[3\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}\right]$$
$=（0\text{ または }1）$ （∵ $r=1$）

(5) $(\sqrt{6n}<)4n<p<6n$ のとき，$\dfrac{1}{6}<\dfrac{n}{p}<\dfrac{1}{4}$ から

$$v=\left[6\frac{n}{p}\right]+\left[2\frac{n}{p}\right]-\left[4\frac{n}{p}\right]-\left[3\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}\right]$$
$=1+0-0-0-0=1$

(6) $(\sqrt{6n}<)2n<p<3n$ のとき，$\dfrac{1}{3}<\dfrac{n}{p}<\dfrac{1}{2}$ から

$$v=\left[6\frac{n}{p}\right]+\left[2\frac{n}{p}\right]-\left[4\frac{n}{p}\right]-\left[3\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}\right]$$
$=2+0-1-1-0=0$

$3n<p<4n$ のとき，$\dfrac{1}{4}<\dfrac{n}{p}<\dfrac{1}{3}$ から

$$v=\left[6\frac{n}{p}\right]+\left[2\frac{n}{p}\right]-\left[4\frac{n}{p}\right]-\left[3\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}\right]$$
$=1+0-1-0-0=0$

【命題 9】 $\theta(6n)-\theta(4n)$ の評価

> 自然数 n に対して，次の不等式が成り立つ。
> (1) $n\geqq 2$ のとき，
> ① $\log A_n\leqq\theta(6n)-\theta(4n)+4n\cdot\log 2+\sqrt{6n}\cdot\log 6n$
> ② $\log A_n\geqq 3n\cdot\log 3-3\log n-5$
> ③ $\theta(6n)-\theta(4n)$
> $$\geqq n\cdot\log\frac{27}{16}+\sqrt{6n}\cdot\log 6n-3\log n-5$$
> (2) $n\geqq 6^5=7776$ のとき，
> $\theta(6n)-\theta(4n)>2\log 6n$

（証明） (1) ①：自然数 A_n の素因数 p の p 指数を $v(p)$ と表すと，$p<6n$ から

$$\log A_n=\sum_{p<6n}v(p)\log p$$
$$=\sum_{p\leqq\sqrt{6n}}v(p)\log p+\sum_{\sqrt{6n}<p<2n}v(p)\log p$$
$$+\sum_{2n<p<4n}v(p)\log p+\sum_{4n<p<6n}v(p)\log p$$

ここで，$\displaystyle\sum_{p\leqq\sqrt{6n}}v(p)\log p\leqq\sum_{p\leqq\sqrt{6n}}v(p)\log 6n=\pi(\sqrt{6n})\log 6n$

$$\leqq\sqrt{6n}\cdot\log 6n$$

また，命題 8 (4)と命題 5 により

$$\sum_{\sqrt{6n}<p<2n}v(p)\log p\leqq\sum_{\sqrt{6n}<p<2n}\log p\leqq\sum_{p<2n}\log p=\theta(2n)$$
$$\leqq 4n\cdot\log 2$$

$\displaystyle\sum_{2n<p<4n}v(p)\log p=0$ （∵ 命題 8 (6)）

さらに，命題 8 (5)により

$$\sum_{4n<p<6n}v(p)\log p=\sum_{4n<p<6n}\log p=\theta(6n)-\theta(4n)$$

以上から，$\log A_n \leqq \theta(6n)-\theta(4n)$
$+4n\cdot\log 2+\sqrt{6n}\cdot\log 6n$

②：命題2のスターリングの公式（高校版）より

$$\log A_n=\log(6n)!+\log(2n)!-\log(4n)!-\log(3n)!-\log(n!)$$
$$\geqq\{6n\cdot\log 6n-6n+1\}+\{2n\cdot\log 2n-2n+1\}$$
$$-\{4n\cdot\log 4n-4n+\log 4n+1\}$$
$$-\{3n\cdot\log 3n-3n+\log 3n+1\}$$
$$-\{n\cdot\log n-n+\log n+1\}$$
$$=3n\cdot\log 3-3\log n-1-\log 12$$
$$>3n\cdot\log 3-3\log n-5$$
$$(\because\ \log 12<4)$$

③：①，②から

$$\theta(6n)-\theta(4n)+4n\cdot\log 2+\sqrt{6n}\cdot\log 6n$$
$$\geqq 3n\cdot\log 3-3\log n-5$$
$$\therefore\ \theta(6n)-\theta(4n)\geqq n\cdot\log\frac{27}{16}-\sqrt{6n}\cdot\log 6n-3\log n-5$$

(2) ここで，$\log\frac{27}{16}=0.52\cdots\cdots>\frac{1}{2}$ により

$$\theta(6n)-\theta(4n)>\frac{1}{2}n-\sqrt{6n}\cdot\log 6n-3\log n-5$$
$$>\frac{1}{12}\cdot 6n-\sqrt{6n}\cdot\log 6n-3\log 6n-5$$
$$(\because\ \log n<\log 6n)$$

命題7の関数 $f(x)$ を用いると，
$=f(6n)+2\log 6n\geqq 2\log 6n$ ■

【命題 10】

> n は自然数とする。
> (1) $n\geqq 4\times 6^5=31104$ のとき，$\theta(1.5n)-\theta(n)>0$
> (2) $8\leqq n<4\times 6^5$ のとき，$\theta(1.5n)-\theta(n)>0$

（証明） (1) $4m\leqq n<4(m+1)$ となる自然数 m ($\geqq 6^5$) をとる。$4m<p<6m$ となる素数 p の中で，$n<p\leqq 1.5n$ に属さない可能性があるものは，$p=4m+1$，$4m+3$ の2個だけであるから，命題9(2)により

$$\theta(1.5n)-\theta(n)\geqq\theta(6m)-\theta(4m)-\log(4m+1)-\log(4m+3)$$
$$>2\cdot\log(6m)-\log(4m+1)-\log(4m+3)>0$$

(2) $n<31104$ のときは，素数の列 $11=p_1<p_2<p_3\cdots\cdots<p_r$ で，$p_{k+1}<1.5p_k$ かつ $31104<p_r$ を満たすものが存在すればよい。実際，次の列がそうである。

11，13，19，23，31，43，61，89，131，193，283，421，631，941，1409，2113，3169，4751，7121，10667，15991，23981，31121 ■

【定理 11】 主題

> 8以上の自然数 n に対して，$n<p<1.5n$ を満たす素数 p が少なくとも1個存在する。

（証明） 命題10(1)と(2)から，8以上の自然数 n に対して $\theta(1.5n)-\theta(n)>0$
したがって，$n<p<1.5n$ を満たす素数 p が少なくとも1個存在する。 ■

《参考文献》

〔1〕 一松信「n と $2n$ の間に素数がある」数研通信数学 No.70　pp.2〜5
〔2〕 末綱恕一　解析的整数論　岩波書店　pp.3〜10
〔3〕 Erdös　Bewis eines Satzes von Tshebyschef　Acta.Sci.Math.(Szeged)，5，pp.194〜198
〔4〕 高木貞治　解析概論（改訂第三版）　岩波書店　pp.258〜260

（広島市立基町高等学校）