2 次曲線による回転体の体積

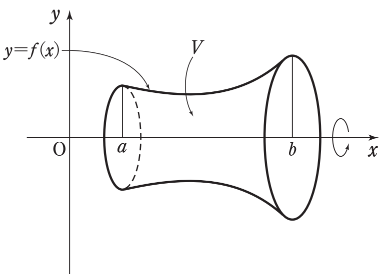
池田 陽一郎（いけだ よういちろう）

§0. はじめに

円錐の体積は，円柱の体積の $\dfrac{1}{3}$ であることはよく知られている。すなわち，円錐の体積$=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$（ここで，r は底面の円の半径，h は高さとする）である。この円錐は，原点を通る直線を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体と考えられる。それでは，2 次曲線を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積はどうなるか考えてみよう。また，そのときの係数がどうなるかについても考察してみたい。

§1. 回転体の体積

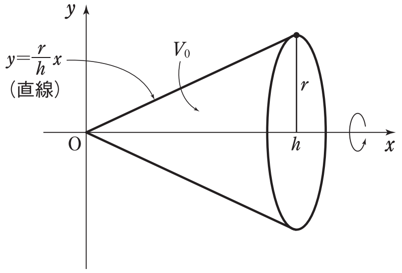
回転体の断面積は円なので，円の面積を積分することで，体積を求めることができる。すなわち，



体積　$V=\pi\displaystyle\int_a^b y^2\,dx$　ただし $a<b$

§2. 円錐の体積と 2 次曲線による回転体の体積

⓪　それでは，積分を使って，円錐の体積 V を求めてみよう。

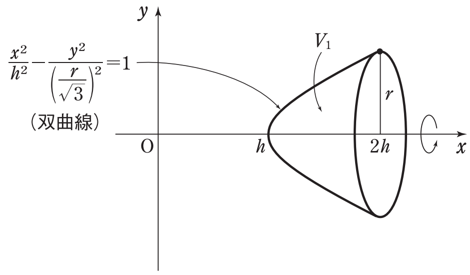


$$
\begin{aligned}
V_0&=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx\\
&=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx\\
&=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h\\
&=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}\\
&=\frac{1}{3}\pi r^2 h
\end{aligned}
$$

したがって，

円錐の体積　$V_0=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$　ここで，係数は $\dfrac{1}{3}=0.\dot{3}$ である。

①　次に，双曲線による回転体の体積 V_1 を求めてみよう。

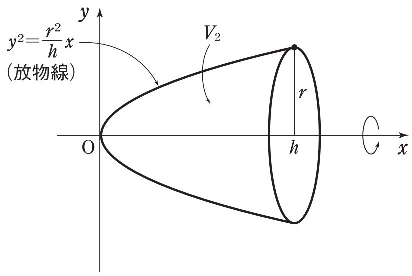


$$
\begin{aligned}
V_1&=\pi\int_h^{2h}\left(\frac{r^2}{3h^2}x^2-\frac{r^2}{3}\right)dx\\
&=\frac{\pi r^2}{3}\int_h^{2h}\left(\frac{1}{h^2}x^2-1\right)dx\\
&=\frac{1}{3}\pi r^2\left[\frac{x^3}{3h^2}-x\right]_h^{2h}\\
&=\frac{1}{3}\pi r^2\left\{\left(\frac{8h^3}{3h^2}-2h\right)-\left(\frac{h^3}{3h^2}-h\right)\right\}\\
&=\frac{1}{3}\pi r^2\left(\frac{8}{3}h-2h-\frac{1}{3}h+h\right)\\
&=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\frac{4}{3}h\\
&=\frac{4}{9}\pi r^2 h
\end{aligned}
$$

したがって，

> 双曲線による回転体の体積　$V_1=\dfrac{4}{9}\pi r^2 h$
>
> ここで，係数は $\dfrac{4}{9}=0.\dot{4}$ である。

②　次に，放物線による回転体の体積 V_2 を求めてみよう。

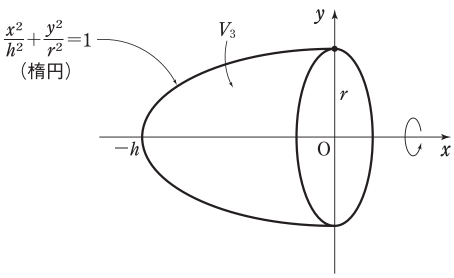


$$V_2=\pi\int_0^h \frac{r^2}{h}x\,dx=\frac{\pi r^2}{h}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h$$
$$=\frac{\pi r^2}{h}\cdot\frac{h^2}{2}=\frac{1}{2}\pi r^2 h$$

したがって，

> 放物線による回転体の体積　$V_2=\dfrac{1}{2}\pi r^2 h$
>
> ここで，係数は $\dfrac{1}{2}=0.5$ である。

③　次に，楕円による回転体の体積 V_3 を求めてみよう。



$$V_3=\pi\int_{-h}^0 r^2\left(1-\frac{x^2}{h^2}\right)dx$$
$$=\pi r^2\left[x-\frac{x^3}{3h^2}\right]_{-h}^0$$
$$=-\pi r^2\left(-h+\frac{h^3}{3h^2}\right)$$
$$=-\pi r^2\left(-\frac{2}{3}h\right)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\pi r^2 h$$

したがって，

> 楕円による回転体の体積　$V_3=\dfrac{2}{3}\pi r^2 h$
>
> ここで，係数は $\dfrac{2}{3}=0.\dot{6}$ である。

§3. おわりに

円錐の体積 V_0 の係数は $\dfrac{1}{3}=0.\dot{3}$,

双曲線による回転体の体積 V_1 の係数は $\dfrac{4}{9}=0.\dot{4}$,

放物線による回転体の体積 V_2 の係数は $\dfrac{1}{2}=0.5$,

楕円による回転体の体積 V_3 の係数は $\dfrac{2}{3}=0.\dot{6}$

であることは，2 次曲線による回転体の体積の係数は，$0.\dot{3}$，$0.\dot{4}$，0.5，$0.\dot{6}$ と連続する小数であることになり，何か，興味を引くものがある。

《参考文献》

〔1〕　数学Ⅲ　数研出版 2004

（東京都立　永山高等学校）