フィボナッチ数列の母関数

坂本　茂（さかもと　しげる）

§1. フィボナッチ数列

成長した1ツガイの兎は1か月毎に1ツガイの兎を生み，生まれた兎は2か月後に成長するとする。各月の成長した兎のツガイの数を a_n とすると a_{n+2} は前月の数 a_{n+1} と2か月前生まれたツガイが成長した数 a_n の和であるから次の漸化式が成り立つ。

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

この数列 $\{a_n\}$ は最初に論じた人に因みフィボナッチ数列と呼ばれる。生物学や物理学で見いだされる重要な数列で，ときに推理小説にも現れる。初期値 $a_0=a_1=1$ としたときの数列は以下のようになる。

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \cdots$$

この数列の一般項 a_n を求めてみよう。

$a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$ において

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

とおくと

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$$

であるから $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ により α，β は

$$t^2-t-1=0$$

の解である。数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は初項 $a_1-\alpha a_0$ 公比 β の等比数列であるから

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_1-\alpha a_0)\beta^n \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

となる。また α と β を交換し，同様の式

$$a_{n+1}-\beta a_n=(a_1-\beta a_0)\alpha^n \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を得るから，これと $\alpha\beta=-1$ より以下の一般項が求められる。$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して

$$a_n=\frac{a_1(\beta^n-\alpha^n)+a_0(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})}{\beta-\alpha}$$

$\alpha^2=\alpha+1$，$\beta^2=\beta+1$ を用いてこの数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ を満たすことが以下のように確かめられる。

$$\begin{aligned}&(\beta-\alpha)(a_{n+1}+a_n)\\&=a_1(\beta^{n+1}+\beta^n-\alpha^{n+1}-\alpha^n)\\&\qquad\qquad+a_0(\beta^n+\beta^{n-1}-\alpha^n-\alpha^{n-1})\\&=a_1(\beta^{n+2}-\alpha^{n+2})+a_0(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})=(\beta-\alpha)a_{n+2}\end{aligned}$$

ここで，特に初期値 $a_0=1$，$a_1=1$ とするとき

$$a_n=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

実際 α，β を求めて次のビネの公式が作られる。

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

なお，これを二項展開してまとめてゆき

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot 2^{n+1}}\sum_{r=0}^{n+1}\{1-(-1)^r\}{}_{n+1}\mathrm{C}_r\sqrt{5}^{\,r}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot 2^n}\sum_{1\leqq k\leqq \frac{n}{2}}{}_{n+1}\mathrm{C}_{2k+1}\sqrt{5}^{\,2k+1}\end{aligned}$$

次の式ができる。ここに［　］はガウス記号である。

$$a_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n+1}\mathrm{C}_{2k+1}\cdot 5^k \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

また $\dfrac{\pi}{5}$，$\dfrac{3\pi}{5}$ の余弦の値から次式が成り立つ。

$$a_n=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{5}}\left(\cos^{n+1}\frac{1}{5}\pi-\cos^{n+1}\frac{3}{5}\pi\right)$$

整数列であるフィボナッチ数列 $\{a_n\}$ の一般項はこのように表される。

§2. フィボナッチ数列の母関数

数列 $\{a_n\}$ が関数 $f(x)$ で

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

と表されるとき $f(x)$ を数列の母関数という。母関数は数列や関数列を考察する上で有力な手段となるが，右辺の級数は収束することが求められる。筆者が二項定理の名を初めて知ったのはシャーロック・ホームズの短編からだったと思うが，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ で $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ とした数列の母関数は

$$\begin{aligned}(1+x)^n&=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_rx^r\\&={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n\end{aligned}$$

である。$x=1$ として $2^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$ となり，微分して $x=1$ とし

$$n\cdot 2^{n-1}={}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+n{}_n\mathrm{C}_n$$

など，母関数から二項係数の様々な式が得られる。

さて，フィボナッチ数列 $\{a_n\}$ の一般項から母関数 $f(x)$ を導いてみよう。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})x^n$$
$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\{\beta\sum_{n=0}^{\infty}(\beta x)^n-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n\}$$

この級数は $|\alpha x|<1$，$|\beta x|<1$ のとき収束し

$$f(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta x}-\frac{\alpha}{1-\alpha x}\right)=\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$
$$=\frac{1}{\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1}$$

となる。ここで α，β は方程式 $t^2-t-1=0$ の解であり，$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ であるから，次のフィボナッチ数列の母関数を得る。

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$$

$\alpha\beta=-1$ から収束範囲は $|x|<|\alpha|$，$|\beta|$ である。すなわち $|x|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ となる。

しかし，母関数 $f(x)$ はフィボナッチ数列の本来の定義である漸化式から求められる。

$$f(x)+xf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}$$
$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n-1})x^n=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^n$$
$$=a_0+\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=a_0+\frac{1}{x}(f(x)-a_0-a_1x)$$

である。収束については検討する必要があるが，これよりフィボナッチ数列 $\{a_n\}$ の母関数

$$f(x)=\frac{a_0+(a_1-a_0)x}{1-x-x^2}$$

が得られる。

§3. フィボナッチ数列とパスカルの三角形

フィボナッチ数列の母関数 $f(x)$ を次のように級数展開すると

$$\frac{1}{1-x-x^2}=1+(x+x^2)+(x+x^2)^2+(x+x^2)^3+\cdots$$

収束範囲は $|x+x^2|<1$ すなわち

$-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}<x<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ で収束する。この展開は

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(x+x^2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_rx^{k-r}x^{2r}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_rx^{k+r}$$

とかける。ここで $k+r=n$ とおき和の順序を換え，さらに $n-k=i$ とおいて

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{2k}{}_k\mathrm{C}_{n-k}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\frac{n}{2}\leqq k\leqq n}{}_k\mathrm{C}_{n-k}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{0\leqq i\leqq\frac{n}{2}}{}_{n-i}\mathrm{C}_ix^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-i}\mathrm{C}_ix^n$$

となる。すなわちこの展開で x^n の係数 a_n は

$$a_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-i}\mathrm{C}_i$$

である。$a_0=1$，$a_1=1$ であって，$n\geqq 1$ においてこの数列の隣接 2 項間の和

$$a_n+a_{n+1}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-i}\mathrm{C}_i+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{}_{n+1-i}\mathrm{C}_i$$

を調べてみる。

偶数 $n=2m$ のとき

$$a_n+a_{n+1}=\sum_{i=0}^{m}({}_{n-i}\mathrm{C}_i+{}_{n+1-i}\mathrm{C}_i)$$
$$={}_{n+1}\mathrm{C}_0+\sum_{i=1}^{m}({}_{n+1-i}\mathrm{C}_{i-1}+{}_{n+1-i}\mathrm{C}_i)+{}_{n-m}\mathrm{C}_m$$
$$={}_{n+2}\mathrm{C}_0+\sum_{i=1}^{m}{}_{n+2-i}\mathrm{C}_i+{}_{n+2-m-1}\mathrm{C}_{m+1}$$
$$=\sum_{i=0}^{m+1}{}_{n+2-i}\mathrm{C}_i=a_{n+2}$$

奇数 $n=2m+1$ のとき

$$a_n+a_{n+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_0+\sum_{i=0}^{m}({}_{n-i}\mathrm{C}_i+{}_{n-i}\mathrm{C}_{i+1})$$
$$={}_{n+1}\mathrm{C}_0+\sum_{i=0}^{m}{}_{n+1-i}\mathrm{C}_{i+1}={}_{n+2}\mathrm{C}_0+\sum_{i=1}^{m+1}{}_{n+2-i}\mathrm{C}_i$$
$$=\sum_{i=0}^{m+1}{}_{n+2-i}\mathrm{C}_i=a_{n+2}$$

したがって $a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$ が成り立っている。無限級数の和の順序を換えて変形したので

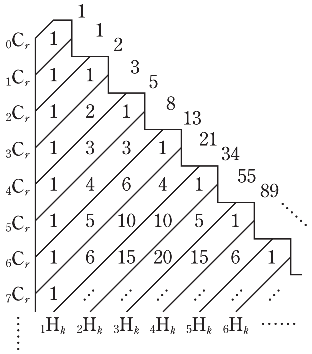
$$\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

の最初の収束範囲での収束は確かでないのだが，x^n の係数列 $\{a_n\}$ は確かにフィボナッチ数列になっていることがわかる。したがって $|x|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ の範囲で収束する。ここで，一般項 a_n が

$$a_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-i}\mathrm{C}_i={}_n\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-2}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\mathrm{C}_{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

と表されることからフィボナッチ数列とパスカルの三角形との関係が明らかになる。すなわち ${}_n\mathrm{C}_r$ の直角三角形の図表で斜めの数の和が a_n である。こ

の直角三角形の図表を眺めても ${}_n\mathrm{C}_r$ の漸化式から数列 $\{a_n\}$ はフィボナッチ数列の漸化式を満たしていることが見える。



フィボナッチ数列とパスカルの直角三角形

図表の縦列すなわち r を固定したときの ${}_n\mathrm{C}_r$ の数列は $n-r=k$ とおき

$$ {}_n\mathrm{C}_r={}_{r+k}\mathrm{C}_r={}_{r+k}\mathrm{C}_k={}_{r+1}\mathrm{H}_k \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots $$

と（重複組合せで）表せる。一方 $(1+x+x^2+\cdots)^r$ の展開で x^k の係数は同次積 ${}_r\mathrm{H}_k$ であるから，数列 $\{{}_r\mathrm{H}_k\}$ の母関数は次のようになる。

$$ \frac{1}{(1-x)^r}=\sum_{k=0}^{\infty}{}_r\mathrm{H}_k x^k \qquad |x|<1 $$

したがって，パスカルの直角三角形で r 列の母関数は

$$ \frac{1}{(1-x)^{r+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}{}_{r+1}\mathrm{H}_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}{}_{r+k}\mathrm{C}_r x^k \qquad |x|<1 $$

である。また，$r-1$ 列の k 番までの和は次の r 列の k 番になっている。

$$ {}_{r+1}\mathrm{H}_k=\sum_{i=0}^{k}{}_r\mathrm{H}_i, \qquad {}_{r+1}\mathrm{H}_k={}_{r+k}\mathrm{C}_r=\sum_{i=0}^{k}{}_{r-1+i}\mathrm{C}_{r-1} $$

§4. 母関数からビネの公式

フィボナッチ数列の母関数 $f(x)$ を導いたのを逆に辿れば，一般項 a_n を得るのだが，最初に母関数が与えられたとき，一般項 a_n は次のようにして得られる。方程式 $x^2+x-1=0$ の 2 解を $\gamma,\ \delta$ とし，母関数 $f(x)$ を部分分数に分解すると

$$ f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=-\frac{1}{(x-\gamma)(x-\delta)} $$
$$ =\frac{1}{\delta-\gamma}\left(\frac{1}{\delta-x}-\frac{1}{\gamma-x}\right) $$
$$ =\frac{1}{\delta-\gamma}\left(\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{1-x/\delta}-\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{1-x/\gamma}\right) $$

となる。級数展開すると $|x|<|\gamma|,\ |\delta|$ の範囲において収束する。

$$ f(x)=\frac{1}{\delta-\gamma}\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\delta}\right)^n-\frac{1}{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^n\right\} $$

ここで $\gamma\delta=-1$ であるから

$$ f(x)=\frac{1}{\delta-\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\{(-\gamma)^{n+1}-(-\delta)^{n+1}\}x^n $$

となって，次の一般項 a_n が得られる。

$$ a_n=\frac{(-\gamma)^{n+1}-(-\delta)^{n+1}}{-\gamma+\delta} \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots $$

$\gamma,\ \delta$ は $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ であり $\alpha,\ \beta$ は $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ であって符号が異なるものどうしである。そこで $\beta=-\gamma$, $\alpha=-\delta$ として，次のようになる。

$$ a_n=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots $$

あるいは $f(x)$ の k 階導関数を $f^{(k)}(x)$ とすると $f^{(n)}(0)=n!a_n$ であることから一般項 a_n は導かれる。すなわち

$$ f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\delta-\gamma}\left(\frac{1}{\delta-x}-\frac{1}{\gamma-x}\right) $$
$$ =\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{x+\beta}-\frac{1}{x+\alpha}\right) $$

となるが，これを n 回 x で微分して

$$ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{\beta-\alpha}\{(x+\beta)^{-n-1}-(x+\alpha)^{-n-1}\} $$

ここで，$x=0$ のときの値は $\alpha\beta=-1$ により，次のようになる。

$$ f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n n!}{\beta-\alpha}\left\{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}\right\} $$
$$ =\frac{(-1)^n n!}{\beta-\alpha}\{(-\alpha)^{n+1}-(-\beta)^{n+1}\}=n!\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} $$

§5. フィボナッチ数列の考察

漸化式を $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$ の形で負の整数 $n<0$ に対しても $\{a_n\}$ に適用すると

$\cdots\pm,\ 13,\ -8,\ 5,\ -3,\ 2,\ -1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$

の列が得られる。特に初期値 $f_0=0$, $f_1=1$ のものを $\{f_n\}$ とすると負の項は

$$ f_{-(2m-1)}=f_{2m-1}, \qquad f_{-2m}=-f_{2m} \qquad m=1,\ 2,\ \cdots $$

となっている。実際 $m=1$ のとき成り立つが，m で成り立つと仮定すれば $m+1$ のときにも成り立つことが，以下で示される。

$$ f_{-(2m+1)}=f_{-(2m+1)+2}-f_{-(2m+1)+1}=f_{-(2m-1)}-f_{-2m} $$
$$ =f_{2m-1}+f_{2m}=f_{2m+1} $$
$$ f_{-2(m+1)}=f_{-2(m+1)+2}-f_{-2(m+1)+1}=f_{-2m}-f_{-(2m+1)} $$
$$ =-f_{2m}-f_{2m+1}=-f_{2(m+1)} $$

この列のどの隣り合う 2 項を初期値にとっても，平

行移動して同じ数列になる。一般項は

$$f_n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}=\frac{\delta^{-n}-\gamma^{-n}}{\delta-\gamma}$$

となるが，負の整数 $n<0$ に対しても成り立つ。$m=-n=1,\ 2,\ \cdots$ とおいて §1同様

$$f_m=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^m-\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^m\right\}$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}{}_m\mathrm{C}_{2k+1}5^k$$

となり，あるいは次のようにも表される。

$$f_m=\frac{2^m}{\sqrt{5}}\left\{\cos^m\frac{2}{5}\pi-\cos^m\frac{4}{5}\pi\right\}$$

フィボナッチ数列 $\{a_n\}$ で2項の差

$$a_{n+1}{}^{(1)}=a_{n+2}-a_{n+1}=a_n$$

とする階差数列 $\{a_n{}^{(1)}\}$ は，数列 $\{a_n\}$ の項が1つ後にずれる。したがって，数列 $\{f_n\}$ の第 k 階差数列 $\{f_n{}^{(k)}\}$ の一般項は以下になる。

$$f_n{}^{(k)}=f_{n-k}\ (n\geqq k),\quad f_n{}^{(k)}=(-1)^{k+1}f_{k-n}\ (n<k)$$

漸化式と初期値からフィボナッチ数列 $\{a_n\}$ は $a_n=b_na_1+c_na_0$ のようにある数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ で表される。やはり a_n の漸化式により

$$b_{n+2}a_1+c_{n+2}a_0=b_{n+1}a_1+c_{n+1}a_0+b_na_1+c_na_0$$

であるから b_n，c_n もフィボナッチ数列の漸化式を満たすことになる。

$$b_{n+2}=b_{n+1}+b_n,\qquad c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$$

また $a_0=0\cdot a_1+1\cdot a_0$，$a_1=1\cdot a_1+0\cdot a_0$ から $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の初期値はそれぞれ

$$b_0=0,\ b_1=1 \text{ および } c_0=1,\ c_1=0$$

である。したがって，この2つの数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ は $b_n=f_n$ および $c_n=f_{n-1}$ であることがわかる。すなわち，初期値 a_0，a_1 のフィボナッチ数列 $\{a_n\}$ は

$$a_n=a_1f_n+a_0f_{n-1}$$

と表される。例えば，初期値 $a_1=1$，$a_2=3$ $(a_0=2)$ のフィボナッチ数列は，上の列 $\{f_n\}$ からは初期値を選べないが，この数列も $a_n=f_n+2f_{n-1}$ と表せる。実際，リュカ数と呼ばれる

…±，7，−4，3，−1，2，1，3，4，7，11，18，29，47，…

となる列で，§1より一般項，§2より母関数は次で表される

$$a_n=\alpha^n+\beta^n=\gamma^{-n}+\delta^{-n},\qquad f(x)=\frac{2-x}{1-x-x^2}$$

$n<0$ のとき，漸化式 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$ により決まる負の列を考えた。いま $m=-n$ として $b_m=a_{-n}$ とする数列 $\{b_m\}$ は，漸化式が $b_m=b_{m-2}-b_{m-1}$ を満たす。この数列 $\{b_m\}$ の母関数 $\varphi(x)$ を導いてみる。漸化式を用いて変形し，次のようになる。

$$\varphi(x)-x\varphi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}b_mx^m-\sum_{m=0}^{\infty}b_mx^{m+1}$$

$$=b_0+\sum_{m=1}^{\infty}(b_m-b_{m-1})x^m=b_0-\sum_{m=1}^{\infty}b_{m+1}x^m$$

$$=b_0-\frac{1}{x}\sum_{m=2}^{\infty}b_mx^m=b_0-\frac{1}{x}(\varphi(x)-b_0-b_1x)$$

これより，収束について検討する必要があるが，数列 $\{b_m\}$ の母関数

$$\varphi(x)=\frac{b_0+(b_0+b_1)x}{1+x-x^2}$$

が得られる。$b_0=1$，$b_1=-1$ とすれば

$\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x-x^2}$ である。これはフィボナッチ数列の逆方向の数列と考えられる。一般項 b_m は §4 の α，β と γ，δ の役割が入れ替わり，整数 $m\geqq0$ で

$$b_m=\frac{(-\alpha)^{m+1}-(-\beta)^{m+1}}{-\alpha+\beta}=\frac{\delta^{m+1}-\gamma^{m+1}}{\delta-\gamma}$$

となる。§3同様に母関数 $\varphi(x)$ を展開し

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x-x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(x^2-x)^k$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-i}\mathrm{C}_i(-x)^n$$

となるので $b_n=(-1)^n\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-i}\mathrm{C}_i$ であり

$b_n=(-1)^na_n$ が成り立つ。

$$\beta-\alpha=\delta-\gamma=\sqrt{5},$$

$$\alpha\beta=\gamma\delta=-1,$$

$$\alpha+\delta=\beta+\gamma=0$$

の関係があって，$h_0=0$，$h_1=1$ とする列を $\{h_n\}$ とすると，整数 $n\geqq0$ において

$$h_n=\frac{\delta^n-\gamma^n}{\delta-\gamma}=\frac{\beta^{-n}-\alpha^{-n}}{\beta-\alpha}=(-1)^{n+1}\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}$$

であり，$f_{-n}=h_n$，$h_{-n}=f_n$ また $h_n=(-1)^{n+1}f_n$ となることがわかる。$\{f_n\}$，$\{h_n\}$ の母関数はそれぞれ次の関数である。$(f_n=a_{n-1},\ h_n=b_{n-1})$

$$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2},\qquad \varphi(x)=\frac{x}{1+x-x^2}$$

（元東京都立高等学校）