絶対値記号を含む不等式について

柳田(やなぎた)　五夫(いつお)

§1. はじめに

参考文献〔1〕には，次のような興味深い不等式が紹介されている。

(Hlawka の不等式)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を3次元のベクトルとするとき

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{b}+\vec{c}|-|\vec{c}+\vec{a}|-|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\geqq 0$$

$\vec{a}_k$ を n 次元のベクトルとするとき

$$(m-2)\sum_{k=1}^{m}|\vec{a}_k|+\left|\sum_{k=1}^{m}\vec{a}_k\right| \geqq \sum_{1\leqq i<j\leqq m}|\vec{a}_i+\vec{a}_j| \quad (m\geqq 2)$$

ここでは，これらの2つの不等式を実数の場合に限定したものを含めて，絶対値記号を含む不等式を紹介したい。

問題1の不等式はその中でも基本的な不等式で，この不等式の証明に役立つ等式をあげておく。

補題1　(Yanagita)

(i)　s，t が実数のとき，次の等式を証明せよ。

$$|s|+|t|=\max(|s+t|,\ |s-t|)$$

(ii)　a，b が実数のとき，次の等式を証明せよ。

$$\max(|a|,\ |b|)=\frac{|a+b|+|a-b|}{2}$$

ただし，$\max(p,\ q)$ は，p，q のうち小さくない方を表す。

［**証明**］(i)　$p\geqq 0$，$q\geqq 0$ のとき

$[\max(p,\ q)]^2=\max(p^2,\ q^2)$ が成り立つから

$$\begin{aligned}&[\max(|s+t|,\ |s-t|)]^2\\&=\max((s+t)^2,\ (s-t)^2)\\&=\max(s^2+2st+t^2,\ s^2-2st+t^2)\\&=s^2+t^2+2\max(st,\ -st)\\&=s^2+t^2+2|st|\\&=(|s|+|t|)^2\end{aligned}$$

$$\max(|s+t|,\ |s-t|)\geqq 0,\ |s|+|t|\geqq 0$$

であるから $|s|+|t|=\max(|s+t|,\ |s-t|)$ が成り立つ。

(ii)　(i)で $s=\dfrac{a+b}{2}$，$t=\dfrac{a-b}{2}$ とおけばよい。■

max を使うと $|x|$ は，$|\boldsymbol{x}|=\max(\boldsymbol{x},\ -\boldsymbol{x})$ と表すことができる。

［**注**］他の別証明等については，参考文献〔2〕参照。

§2. 絶対値記号を含む不等式

問題1　x，y，z が実数のとき，次の不等式を証明せよ。

$$|x|+|y|+|z|+|x+y+z| \geqq |x+y|+|y+z|+|z+x|$$

解答　$x+y=2p$，$y+z=2q$，$z+x=2r$ とおくと，$x+y+z=p+q+r$ で，

$$x=p-q+r,\ y=p+q-r,\ z=-p+q+r$$

であるから，証明すべき不等式は

$$|p-q+r|+|p+q-r|+|-p+q+r|+|p+q+r| \geqq 2|p|+2|q|+2|r|$$

となる。補題1から

$$\begin{aligned}&|p-q+r|+|p+q-r|+|-p+q+r|+|p+q+r| \geqq 2|p|+2|q|+2|r|\\
\iff& |p-(q-r)|+|p+(q-r)|+|(q+r)-p|+|(q+r)+p|\geqq 2|p|+2|q|+2|r|\\
\iff& 2\max(|p|,\ |q-r|)+2\max(|q+r|,\ |p|)\geqq 2|p|+2|q|+2|r|\\
\iff& \max(|p|,\ |q-r|)+\max(|q+r|,\ |p|)\geqq |p|+|q|+|r|\end{aligned}$$

$$f(p,\ q,\ r)=\max(|p|,\ |q-r|)+\max(|p|,\ |q+r|)-|p|-|q|-|r|$$

とおくと

$$f(-p,\ q,\ r)=f(p,\ -q,\ r)=f(p,\ q,\ -r)$$
$$=f(p,\ q,\ r),$$
$$f(-p,\ -q,\ r)=f(-p,\ q,\ -r)=f(p,\ -q,\ -r)$$
$$=f(p,\ q,\ r),$$
$$f(-p,\ -q,\ -r)=f(p,\ q,\ r)$$
から

$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$ のとき，$f(p,\ q,\ r)\geqq 0$（＊）

を示せばよい。なぜならば，（＊）が成り立てば，例えば，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\leqq 0$ のときは
$$f(p,\ q,\ r)=f(p,\ q,\ -r)\geqq 0$$
となるからである。

このとき
$$\max(p,\ |q-r|)\geqq p,\ \max(p,\ q+r)\geqq q+r$$
であるから
$$\begin{aligned}&f(p,\ q,\ r)\\&=\max(p,\ |q-r|)+\max(p,\ q+r)-p-q-r\\&\geqq p+q+r-p-q-r=0\end{aligned}$$
■

［**注**］ 別解については，問題5の解答2参照。

問題2　x，y，z が実数のとき，次の不等式を証明せよ。
$$\begin{aligned}&3|x|+3|y|+3|z|+|x+y+z|\\&\geqq 2|x+y|+2|y+z|+2|z+x|\end{aligned}$$

解答　$|x|+|y|+|z|\geqq|x+y+z|$ と問題1の不等式を用いると
$$\begin{aligned}&3|x|+3|y|+3|z|+|x+y+z|\\&=2|x|+2|y|+2|z|+|x|+|y|+|z|+|x+y+z|\\&\geqq 2|x|+2|y|+2|z|+2|x+y+z|\\&\geqq 2|x+y|+2|y+z|+2|z+x|\end{aligned}$$
■

問題3　n は正の整数，x，y，z が実数のとき，次の不等式を証明せよ。
$$\begin{aligned}&|(n+1)x-ny|+|(n+1)y-nz|+|(n+1)z-nx|\\&\geqq|nx-(n-1)y|+|ny-(n-1)z|+|nz-(n-1)x|\end{aligned}$$

解答　$nx-(n-1)y=p$，$ny-(n-1)z=q$，$nz-(n-1)x=r$ とおくと
$$x=\frac{n^2p+n(n-1)q+(n-1)^2r}{3n^2-3n+1},$$
$$y=\frac{(n-1)^2p+n^2q+n(n-1)r}{3n^2-3n+1},$$
$$z=\frac{n(n-1)p+(n-1)^2q+n^2r}{3n^2-3n+1}$$
証明すべき不等式は
$$\begin{aligned}&|(3n^2-n)p-nq-(n-1)r|\\&\quad+|(3n^2-n)q-nr-(n-1)p|\\&\quad+|(3n^2-n)r-np-(n-1)q|\\&\geqq(3n^2-3n+1)(|p|+|q|+|r|)\end{aligned}$$
ここで，$|\alpha-\beta|\geqq|\alpha|-|\beta|$ を用いると
$$\begin{aligned}&|(3n^2-n)p-nq-(n-1)r|\\&\geqq|(3n^2-n)p-nq|-(n-1)|r|\\&\geqq(3n^2-n)|p|-n|q|-(n-1)|r|\end{aligned}$$
同様にして　$|(3n^2-n)q-nr-(n-1)p|$
$$\geqq(3n^2-n)|q|-n|r|-(n-1)|p|,$$
$$|(3n^2-n)r-np-(n-1)q|$$
$$\geqq(3n^2-n)|r|-n|p|-(n-1)|q|$$
これらの不等式の辺々を加えると
$$\begin{aligned}&|(3n^2-n)p-nq-(n-1)r|\\&\quad+|(3n^2-n)q-nr-(n-1)p|\\&\quad+|(3n^2-n)r-np-(n-1)q|\\&\geqq(3n^2-3n+1)(|p|+|q|+|r|)\end{aligned}$$
■

問題4　x，y，z，t が実数のとき，次の不等式を証明せよ。
$$\begin{aligned}&2(|x|+|y|+|z|+|t|)+|x+y+z+t|\\&\geqq|x+y|+|y+z|+|z+t|+|t+x|+|x+z|+|y+t|\end{aligned}$$

解答　問題1の不等式
$$|x+y+z|\geqq|x+y|+|y+z|+|z+x|-(|x|+|y|+|z|)$$
において，z のところに $z+t$ を代入すると
$$\begin{aligned}&|x+y+z+t|\\&\geqq|x+y|+|y+z+t|+|z+t+x|\\&\quad-(|x|+|y|+|z+t|)\\&\geqq|x+y|+|y+z|+|z+t|+|t+y|\\&\quad-(|y|+|z|+|t|)+|z+t|+|t+x|+|x+z|\\&\quad-(|z|+|t|+|x|)-(|x|+|y|+|z+t|)\\&=|x+y|+|y+z|+|z+t|+|t+x|+|x+z|+|y+t|\\&\quad-2(|x|+|y|+|z|+|t|)\end{aligned}$$
から証明すべき不等式を得る。■

問題5　x_1，x_2，x_3，x_4 が実数のとき，次の不等式を証明せよ。
$$\begin{aligned}&(|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|)+2|x_1+x_2+x_3+x_4|\\&\geqq|x_1+x_2+x_3|+|x_1+x_2+x_4|\\&\quad+|x_1+x_3+x_4|+|x_2+x_3+x_4|\end{aligned}$$

解答1　$S=x_1+x_2+x_3+x_4$ とおく。問題1の不等式
$$|x+y+z|\geqq|x+y|+|y+z|+|z+x|$$

$-(|x|+|y|+|z|)$

において

$x=x_1+x_2,\ y=x_3,\ z=x_4,$

$x=x_1+x_3,\ y=x_2,\ z=x_4,$

$x=x_1+x_4,\ y=x_2,\ z=x_3,$

$x=x_2+x_3,\ y=x_1,\ z=x_4,$

$x=x_2+x_4,\ y=x_1,\ z=x_3,$

$x=x_3+x_4,\ y=x_1,\ z=x_2$ とおいた。

$$|S| \geqq |x_1+x_2+x_3|+|x_3+x_4|+|x_1+x_2+x_4| -(|x_1+x_2|+|x_3|+|x_4|) \quad \cdots\cdots①$$

$$|S| \geqq |x_1+x_2+x_3|+|x_2+x_4|+|x_1+x_3+x_4| -(|x_1+x_3|+|x_2|+|x_4|) \quad \cdots\cdots②$$

$$|S| \geqq |x_1+x_2+x_4|+|x_2+x_3|+|x_1+x_3+x_4| -(|x_1+x_4|+|x_2|+|x_3|) \quad \cdots\cdots③$$

$$|S| \geqq |x_1+x_2+x_3|+|x_1+x_4|+|x_2+x_3+x_4| -(|x_2+x_3|+|x_1|+|x_4|) \quad \cdots\cdots④$$

$$|S| \geqq |x_1+x_2+x_4|+|x_1+x_3|+|x_2+x_3+x_4| -(|x_2+x_4|+|x_1|+|x_3|) \quad \cdots\cdots⑤$$

$$|S| \geqq |x_1+x_3+x_4|+|x_1+x_2|+|x_2+x_3+x_4| -(|x_3+x_4|+|x_1|+|x_2|) \quad \cdots\cdots⑥$$

(①+②+…+⑥)÷3 から

$$(|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|)+2|x_1+x_2+x_3+x_4| \geqq |x_1+x_2+x_3|+|x_1+x_2+x_4| +|x_1+x_3+x_4|+|x_2+x_3+x_4|$$

■

解答 2　$S=x_1+x_2+x_3+x_4$ とおくと証明すべき不等式は

$$|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+2|S| \geqq |S-x_1|+|S-x_2|+|S-x_3|+|S-x_4|$$

となる。$x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4$ と仮定しても一般性を失わない。

(i)　$x_4 \geqq S$ のとき，$x_i \geqq S$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ であるから

$$|S-x_1|+|S-x_2|+|S-x_3|+|S-x_4| =x_1-S+x_2-S+x_3-S+x_4-S=-3S \leqq 3|S| \leqq \sum_{i=1}^{4}|x_i|+2|S|$$

(ii)　$x_1 \leqq S$ のとき，$x_i \leqq S$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ であるから

$$|S-x_1|+|S-x_2|+|S-x_3|+|S-x_4| =S-x_1+S-x_2+S-x_3+S-x_4=3S \leqq 3|S| \leqq \sum_{i=1}^{4}|x_i|+2|S|$$

(iii)　$x_k \geqq S \geqq x_{k+1}$ を満たす k $(1 \leqq k \leqq 3)$ が存在するとき

$$\sum_{i=1}^{4}|S-x_i| =\sum_{i=1}^{k}|S-x_i|+\sum_{i=k+1}^{4}|S-x_i| =\sum_{i=1}^{k}x_i-kS+(4-k)S-\sum_{i=k+1}^{4}x_i =\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=k+1}^{4}x_i+(4-2k)S \leqq \sum_{i=1}^{4}|x_i|+|4-2k||S| \leqq \sum_{i=1}^{4}|x_i|+2|S|$$

問題5の解答2の方法を使うと，一般の場合も証明できる。

> $n \geqq 3$ は正の整数，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ が実数で，$S=\sum_{i=1}^{n}x_i$ とおくとき，次の不等式が成り立つ。
> $$\sum_{i=1}^{n}|x_i|+(n-2)|S| \geqq \sum_{i=1}^{n}|S-x_i|$$

> **問題 6**　$n \geqq 2$ は正の整数，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ が実数のとき，次の不等式を証明せよ。
> $$|nx_1-x_2|+|nx_2-x_3|+\cdots+|nx_n-x_1| \geqq (n-1)(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$$

解答　$|\alpha-\beta| \geqq |\alpha|-|\beta|$ を用いると

$|nx_1-x_2| \geqq n|x_1|-|x_2|,\ |nx_2-x_3| \geqq n|x_2|-|x_3|,$

$\cdots,\ |nx_n-x_1| \geqq n|x_n|-|x_1|$

これらの不等式の辺々を加えると

$$|nx_1-x_2|+|nx_2-x_3|+\cdots+|nx_n-x_1| \geqq (n-1)(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$$

が得られる。■

> **問題 7**　$n \geqq 3$ は正の整数，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ が実数のとき，次の不等式を証明せよ。
> $$(n-2)\sum_{i=1}^{n}|x_i|+\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right| \geqq \sum_{1 \leqq i<j \leqq n}|x_i+x_j|$$

解答　数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=3$ のときは，問題1から成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，

$$\left|\sum_{i=1}^{k}t_i\right| \geqq \sum_{1 \leqq i<j \leqq k}|t_i+t_j|-(k-2)\sum_{i=1}^{k}|t_i|$$

この式で，$t_i=x_i$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$，$t_k=x_k+x_{k+1}$ とおくと

$$\left|\sum_{i=1}^{k+1}x_i\right| \geqq \sum_{1 \leqq i<j \leqq k-1}|x_i+x_j|+\sum_{1 \leqq i<k}|x_i+x_k+x_{k+1}|$$

$$-(k-2)\left[\sum_{i=1}^{k-1}|x_i|+|x_k+x_{k+1}|\right]$$

$$\geqq \sum_{1\leqq i<j\leqq k-1}|x_i+x_j|$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\Big[|x_i+x_k|+|x_i+x_{k+1}|+|x_k+x_{k+1}|$$

$$-(|x_i|+|x_k|+|x_{k+1}|)\Big]$$

$$-(k-2)\left[\sum_{i=1}^{k-1}|x_i|+|x_k+x_{k+1}|\right]$$

$$=\sum_{1\leqq i<j\leqq k-1}|x_i+x_j|+\sum_{i=1}^{k-1}\Big[|x_i+x_k|+|x_i+x_{k+1}|\Big]$$

$$+(k-1)|x_k+x_{k+1}|-\sum_{i=1}^{k-1}|x_i|-(k-1)|x_k|$$

$$-(k-1)|x_{k+1}|-(k-2)\sum_{i=1}^{k-1}|x_i|$$

$$-(k-2)|x_k+x_{k+1}|$$

$$=\sum_{1\leqq i<j\leqq k-1}|x_i+x_j|+\sum_{i=1}^{k-1}\Big[|x_i+x_k|+|x_i+x_{k+1}|\Big]$$

$$+|x_k+x_{k+1}|-(k-1)\sum_{i=1}^{k-1}|x_i|$$

$$-(k-1)|x_k|-(k-1)|x_{k+1}|$$

$$=\sum_{1\leqq i<j\leqq k+1}|x_i+x_j|-(k-1)\sum_{i=1}^{k+1}|x_i|$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)，(ii)から，3 以上のすべての整数 n について不等式は成り立つ。 ■

§3. おわりに

はじめに述べた Hlawka の不等式は次のように示すことができる。

> $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を n 次元のベクトルとするとき
> $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{b}+\vec{c}|-|\vec{c}+\vec{a}|-|\vec{a}+\vec{b}|$
> $+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\geqq 0$

[証明] $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の中に $\vec{0}$ がある場合は，明らかに不等式は成り立つから，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ はすべて $\vec{0}$ に等しくないとする。

$$(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|)^2-(|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|)^2$$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+2|\vec{b}||\vec{c}|+2|\vec{c}||\vec{a}|$$

$$-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=2(|\vec{a}||\vec{b}|-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}||\vec{c}|-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}||\vec{a}|-\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=[(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2]$$

$$+[(|\vec{b}|+|\vec{c}|)^2-|\vec{b}+\vec{c}|^2]$$

$$+[(|\vec{c}|+|\vec{a}|)^2-|\vec{c}+\vec{a}|^2]$$

$$=[(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{a}+\vec{b}|)(|\vec{a}|+|\vec{b}|-|\vec{a}+\vec{b}|)]$$

$$+[(|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{b}+\vec{c}|)(|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{b}+\vec{c}|)]$$

$$+[(|\vec{c}|+|\vec{a}|+|\vec{c}+\vec{a}|)(|\vec{c}|+|\vec{a}|-|\vec{c}+\vec{a}|)]$$

ここで，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{c}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|+|\vec{c}|$ が成り立つから

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$$

同様にして

$$|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{b}+\vec{c}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|,$$

$$|\vec{c}|+|\vec{a}|+|\vec{c}+\vec{a}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$$

これを使うと

$$(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|)^2-(|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|)^2$$

$$\leqq(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|)(|\vec{a}|+|\vec{b}|-|\vec{a}+\vec{b}|)$$

$$+(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|)(|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{b}+\vec{c}|)$$

$$+(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|)(|\vec{c}|+|\vec{a}|-|\vec{c}+\vec{a}|)$$

この不等式の両辺を $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ (>0) で割ると

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$$

$$\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|-|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{b}+\vec{c}|$$

$$+|\vec{c}|+|\vec{a}|-|\vec{c}+\vec{a}|$$

すなわち，証明すべき不等式が得られる。

《参考文献》

〔1〕 大関信雄・大関清太　不等式への招待　近代科学社　pp.33～34

〔2〕 柳田五夫　Proposition の（再）発見の方法について　数研通信 No.13　pp.22～23

（栃木県　佐野日本大学中等教育学校）