ベクトルの三角不等式の活用

岡本（おかもと）　雅史（まさし）

§1. ベクトルの三角不等式

$|\vec{a}|\sim|\vec{b}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ ……(☆)

等号は左右ともに，

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$

のときと，さらに

左の等号は

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが反対

右の等号は

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じ

とき，成り立つ。

が，最大値・最小値問題に活用できる例（特に§3.）を紹介させていただきたい。

§2. ベクトルの大きさの最大値と最小値

【問題1】 次の式を満たす平面ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ がある。

$|\vec{a}+2\vec{b}|=1$，$|2\vec{a}+\vec{b}|=1$

このとき，$|\vec{a}-3\vec{b}|$ のとり得る値の最大値と最小値を求めよ。 〔07　防衛大　改題〕

この問題の最大値を求める部分は，参考文献〔1〕で中瀬古先生が解かれている。その解答を参考に，三角不等式を使って解いた。最大値・最小値をとるときの $\vec{a}$，$\vec{b}$ も調べたが，その過程もなかなかおもしろい。

解答　$\vec{a}+2\vec{b}=\vec{u}$ ……①

$2\vec{a}+\vec{b}=\vec{v}$ ……②

とすると，①＋② から

$3(\vec{a}+\vec{b})=\vec{u}+\vec{v}$

したがって，$\vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$ ……③

②－③ から　$\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}$

①－③ から　$\vec{b}=\frac{2}{3}\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}$

よって，

$$\vec{a}-3\vec{b}=\left(-\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}\right)-3\left(\frac{2}{3}\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}\right)$$
$$=\frac{1}{3}(-7\vec{u}+5\vec{v})$$

であり，条件から，

$|\vec{u}|=1$，$|\vec{v}|=1$ ……④

ゆえに，

$$|\vec{a}-3\vec{b}|=\frac{1}{3}|-7\vec{u}+5\vec{v}|$$
$$\leqq\frac{1}{3}(|-7\vec{u}|+|5\vec{v}|)\ \cdots⑤\quad\because(☆)\text{の右の不等号}$$
$$=\frac{1}{3}(7+5)=4$$

⑤の等号は $-7\vec{u}$ と $5\vec{v}$ の向きが同じ，すなわち $\vec{a}+2\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ の向きが反対のときに成り立つ。

このとき，条件から，

$2\vec{a}+\vec{b}=-(\vec{a}+2\vec{b})$　　∴　$\vec{a}=-\vec{b}$

したがって，$\vec{a}+2\vec{b}=-\vec{b}+2\vec{b}=\vec{b}$

よって，$2\vec{a}+\vec{b}=-(\vec{a}+2\vec{b})=-\vec{b}=\vec{a}$

以上から，⑤の等号が成り立つのは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに単位ベクトル，かつ互いに逆ベクトルのときで，このとき $|\vec{a}-3\vec{b}|$ の最大値は 4

また，④から $|-7\vec{u}|>|5\vec{v}|$ であるから

$$|\vec{a}-3\vec{b}|=\frac{1}{3}|-7\vec{u}+5\vec{v}|$$
$$\geqq\frac{1}{3}(|-7\vec{u}|-|5\vec{v}|)\ \cdots⑥\quad\because(☆)\text{の左の不等号}$$
$$=\frac{1}{3}(7-5)=\frac{2}{3}$$

⑥の等号は $-7\vec{u}$ と $5\vec{v}$ の向きが反対，すなわち $\vec{a}+2\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ の向きが同じときに成り立つ。

このとき，条件から，

$\vec{a}+2\vec{b}=2\vec{a}+\vec{b}$　　∴　$\vec{a}=\vec{b}$

したがって，$|\vec{a}+2\vec{b}|=|3\vec{a}|=1$ であるから

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\frac{1}{3}$$

以上から，⑥の等号が成り立つのは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が等し

く，大きさが $\dfrac{1}{3}$ のときで，このとき $|\vec{a}-3\vec{b}|$ の最小値は $\dfrac{2}{3}$ 終

2012 年の青山学院大の経済学部で，類題が出題されている。

§3. 無理関数の和の最小値と差の最大値

【問題 2】 関数 $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t^2-2t+2}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

〔09　信州大・医 (後期) 改題〕

この問題は微分して求めることもできるが，計算が煩雑である

解答　$f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t^2-2t+2}$

$=\sqrt{t^2+(\sqrt{2})^2}+\sqrt{(1-t)^2+1^2}$

ここで，$\vec{a}=(t,\ \sqrt{2})$，$\vec{b}=(1-t,\ 1)$ とおくと，

$f(t)=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ である。

また，$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ \sqrt{2}+1)$ となるから，

$$\begin{aligned} f(t)&=|\vec{a}|+|\vec{b}| \\ &\geqq|\vec{a}+\vec{b}| \qquad \cdots\cdots① \\ &=\sqrt{1^2+(\sqrt{2}+1)^2} \\ &=\sqrt{4+2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であり，①の等号は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じときに成り立つから，

$k\vec{b}=\vec{a}$ $(k>0)$

よって，

$k(1-t,\ 1)=(t,\ \sqrt{2})$

したがって，

$$\begin{cases} k(1-t)=t \\ k=\sqrt{2}\ (>0) \end{cases}$$

この方程式を解いて

$t=2-\sqrt{2}$

$(0\leqq t\leqq 1$ を満たす$)$

以上から，$t=2-\sqrt{2}$ のとき

$f(t)$ の最小値 $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ 終

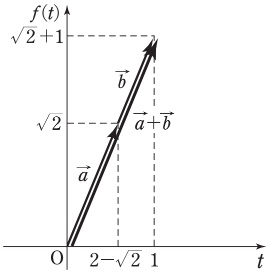

図 1

$f(t)$ が最小値をとるときの $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$ は，図 1 のようになる。

2012 年のお茶の水女子大の理学部 (後期) でも，問題 2 と同じような無理関数の和が最小値をとるときの t の値を求める必要のある問題が出題されている。

問題 2 の定義域と，関数の根号の間の符号を－に変えると，ベクトルの三角不等式により最大値が求まる。

【問題 3】 関数 $g(t)=\sqrt{t^2+2}-\sqrt{t^2-2t+2}$ $(t>1)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

解答　$g(t)=\sqrt{t^2+2}-\sqrt{t^2-2t+2}$

$=\sqrt{t^2+(\sqrt{2})^2}-\sqrt{(1-t)^2+(-1)^2}$

ここで，$\vec{a}=(t,\ \sqrt{2})$，$\vec{b}=(1-t,\ -1)$ とおくと，

$g(t)=|\vec{a}|-|\vec{b}|$ で，$t>1$ より $g(t)>0$ である。

また，$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ \sqrt{2}-1)$ となるから，

$$\begin{aligned} g(t)&=|\vec{a}|-|\vec{b}| \\ &\leqq|\vec{a}+\vec{b}| \qquad \cdots\cdots② \\ &=\sqrt{1^2+(\sqrt{2}-1)^2} \\ &=\sqrt{4-2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であり，②の等号は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが反対のときに成り立つから $\vec{a}=k\vec{b}$ $(k<0)$

したがって，$(t,\ \sqrt{2})=k(1-t,\ -1)$

よって，

$$\begin{cases} t=k(1-t) \\ \sqrt{2}=-k \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，

$$\begin{cases} k=-\sqrt{2}\ (<0) \\ t=2+\sqrt{2}\ (>1) \end{cases}$$

以上から，$t=2+\sqrt{2}$ のとき

$g(t)$ の最大値

$\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ 終

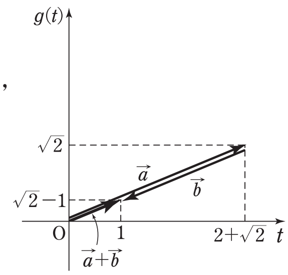

図 2

$g(t)$ が最大値をとるときの $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$ は，図 2 のようになる。

《参考文献》

〔1〕 中瀬古佳史「置き換えは積極的に」
数研通信 No.70　数研出版 p.17　§5

(埼玉県立春日部工業高等学校)