無限等比級数の和の視覚的求め方

西田（にしだ）　和博（かずひろ）

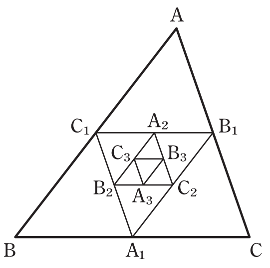
§0. はじめに

以前，数学Ⅲの授業で相似な三角形の面積の和を，無限等比級数として求める問題があった。ちょうどその頃，その無限等比級数の和が視覚的に，しかも一瞬で求められるような図が表紙に使われている本を偶然見つけ，早速その本を購入した。そして，生徒に紹介したところ非常に盛り上がり，授業中に別の無限等比級数の和を視覚的に求められるような図を発見した。ここで紹介するものは必ずしも厳密ではないかも知れないが，視覚的にしかも一瞬で無限等比級数の和を求めることができ，とても興味深いと思い投稿した。

§1. これまでに知られている方法

(1) 初項 $\frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数

数研出版発行「改訂版　新編数学Ⅲ」37 ページに次の問題がある。

> 面積 a の △ABC がある。下の図のように，その各辺の中点を結んで $\triangle A_1B_1C_1$ を作り，次に $\triangle A_1B_1C_1$ の各辺の中点を結んで $\triangle A_2B_2C_2$ を作る。このようにして無数の三角形 $\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$，……，$\triangle A_nB_nC_n$，……を作るとき，これらの面積の和 S を求めよ。
>
> 
>

この問題の解答は，$\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ と $\triangle A_nB_nC_n$ は相似比 1：2 の相似な三角形なので面積比は $1^2:2^2=1:4$ となる。よって，

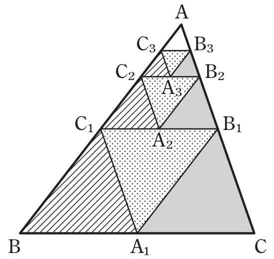
$$S=\frac{1}{4}a+\left(\frac{1}{4}\right)^2a+\left(\frac{1}{4}\right)^3a+\cdots\cdots$$
$$=a\left\{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$
$$=a\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{1}{3}a$$

となる。ここで，

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots=\frac{1}{3}$$

となることは，収束する無限等比級数の和を求める公式から計算することができる。

ここで，問題文の図を次のように書き換えてみる。



つまり，相似な三角形をもとの三角形の中心に重ねるようにして作るのではなく，$\triangle A_1B_1C_1$ の上側に $\triangle A_2B_2C_2$ を，$\triangle A_2B_2C_2$ の上側に $\triangle A_3B_3C_3$ を，……，同様に相似な三角形をもとの三角形の上側に乗せるように作る。すると，上の図により合同な三角形が，横に 3 つずつ並んでいることがわかる（たとえば，$\triangle C_2C_1A_2\equiv\triangle A_2B_2C_2\equiv\triangle B_2A_2B_1$）。これにより，

$$\triangle A_1B_1C_1+\triangle A_2B_2C_2+\triangle A_3B_3C_3+\cdots\cdots$$
$$=\triangle C_1BA_1+\triangle C_2C_1A_2+\triangle C_3C_2A_3+\cdots\cdots$$
$$=\triangle B_1A_1C+\triangle B_2A_2B_1+\triangle B_3A_3B_2+\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{3}\triangle ABC$$

であることがわかる。ここで，△ABC$=1$ とすると，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$ であるので，この図から，

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots=\frac{1}{3}$$

となることは視覚的に理解できる。

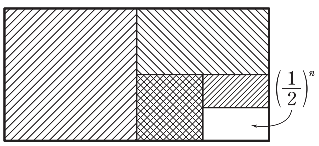
この方法は，参考文献〔1〕からのアイディアである。

(2) 初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数

初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数の和については，下の図のように面積 1 の長方形を，面積が $\frac{1}{2}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^2$，$\left(\frac{1}{2}\right)^3$，……，の長方形で埋めつくしていけば，残った部分（図の白い長方形の部分）の面積は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ となり，$n\to 0$ のとき，$\left(\frac{1}{2}\right)^n\to 0$ であるから，

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots=1$$

は，簡単に理解できる。



§2. 新たに発見した方法

(1) 初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数

授業で，

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots=\frac{1}{3}$$

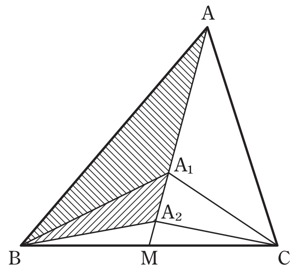
および

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots=1$$

が示せるような図を紹介したところ，当然ながら，

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots=\frac{1}{2}$$

が示せるような図はないかという話題になった。そこで，面積が $\frac{1}{3}$ の図形ということで，三角形の重心を考えたところ，次の図ができあがった。



△ABC は面積が 1 の三角形で，M は辺 BC の中点である。また，△ABC の重心を A_1，$\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{BC}$ の重心を A_2，$\triangle\mathrm{A}_2\mathrm{BC}$ の重心を A_3，……，とおくと，上の図により，

$$\triangle\mathrm{ABA}_1+\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{BA}_2+\triangle\mathrm{A}_2\mathrm{BA}_3+\cdots\cdots=\triangle\mathrm{ABM} \quad \cdots\cdots①$$

である。

$$\triangle\mathrm{ABA}_1=\frac{1}{3},\ \triangle\mathrm{A}_1\mathrm{BA}_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2,$$
$$\triangle\mathrm{A}_2\mathrm{BA}_3=\left(\frac{1}{3}\right)^3,\ \cdots\cdots,$$
$$\triangle\mathrm{ABM}=\frac{1}{2}$$

であるので，①により，

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots=\frac{1}{2}$$

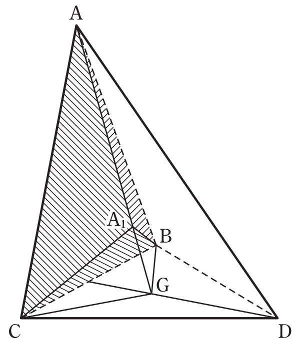
が視覚的に求まる$\left(\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{BM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\to 0\right.$ $(n\to\infty)$ であるので，①は成り立つ$\left.\right)$。

(2) 3 次元への拡張

この後になり，三角形の重心を四面体の重心に置き換えたら，再び，

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots=\frac{1}{3}$$

が求まることに気がついた。四面体の重心とは次のような点である。1 つの頂点と対面の三角形の重心を結ぶ 4 本の線分は 1 点で交わり，その交点によってそれぞれの線分は 3：1 に内分される。この交点のことを四面体の重心と呼ぶ（数研出版発行「クリアー数学Ⅱ＋B」125 ページ，115 番参考）。



体積1の四面体ABCDにおいて，△BCDの重心をG，四面体ABCDの重心をA_1，四面体A_1BCDの重心をA_2，四面体A_2BCDの重心をA_3，……，とおくと，

四面体$ABCA_1$＋四面体A_1BCA_2＋…＝四面体ABCG

$\left(\text{四面体 } A_nBCG=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\to 0 \quad (n\to\infty)\right.$ であるので，上式は成り立つ$\Big)$ である。

$$\text{四面体}ABCA_1=\frac{1}{4},\ \text{四面体}A_1BCA_2=\left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$\text{四面体}A_2BCA_3=\left(\frac{1}{4}\right)^3,\ \cdots\cdots,$$

$$\text{四面体}ABCG=\frac{1}{3}$$

であるので，

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots=\frac{1}{3}$$

が視覚的に求まる。

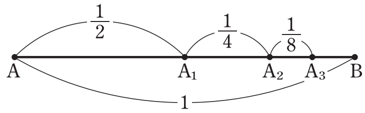
§3. おわりに

さらに，これを4次元空間に拡張してみる。4次元空間の5つの点A，B，C，D，Eを頂点とする「立体」を考える。ただし，5つの点A，B，C，D，Eは，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$が1次独立になるようにとる。この「立体」の「重心」（頂点Aと四面体BCDEの重心を結ぶ線分を4：1に内分する点とする）を用いて，同様の議論を繰り返せば，恐らく，

$$\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots\cdots=\frac{1}{4}$$

が示せると思われるが，これは明らかに「視覚的に」という本稿のタイトルにそぐわないので，これ以上次元を上げることはやめておく。ただし，1次元に次元をおとせば，重心は線分の中点と考えて，下の図により，　$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots=1$

が視覚的に示せる。



《参考文献》

〔1〕 ロジャー・B・ニールセン（Roger B.Nelsen）（秋山仁・奈良知惠・酒井利訓訳）証明の展覧会Ⅱ－眺めて愉しむ数学（原題Proofs Without Words Ⅱ） 東海大学出版会　2003

〔2〕 改訂版　新編 数学Ⅲ　数研出版

〔3〕 改訂版　クリアー数学 Ⅱ＋B　数研出版

（茨城県立水海道第一高等学校）