グラフについて考える
― 重解の考えを使って ―

かたおか　ひろのぶ
片岡　宏信

§1. はじめに

本稿は，重解や共有点といったことを考えることにより，曲線の接線や曲線と曲線が接するということを考えている。既知の知識を使って，グラフを少し違う観点から考えさせることにより，生徒のグラフに対する理解をより深めるとともに，数学のおもしろさを実感できるような教材の開発を目的とした。

§2. 放物線の接線について

放物線 $y=(x-2)^2+3x+1$ の $x=2$ での接線の方程式は $y=3x+1$ である。なぜならば，連立方程式

$$\begin{cases} y=(x-2)^2+3x+1 \\ y=3x+1 \end{cases}$$

を解くと，

$$3x+1=(x-2)^2+3x+1$$

から，重解 $x=2$ が得られる。

よって，放物線 $y=(x-2)^2+3x+1$ と直線 $y=3x+1$ は $x=2$ で重解をもつので，直線 $y=3x+1$ は放物線 $y=(x-2)^2+3x+1$ の $x=2$ での接線になっている。

このことは容易に一般化できて，次のことがいえる。

> $y=a(x-p)^2+bx+c$ の $x=p$ における接線の式は，$y=bx+c$ である。

証明　連立方程式

$$\begin{cases} y=a(x-p)^2+bx+c \\ y=bx+c \end{cases}$$

を解くと，$a(x-p)^2=0$ から，重解 $x=p$ が求まる。したがって，$y=bx+c$ は $x=p$ において，

$$y=a(x-p)^2+bx+c$$

と接している。

（証明終）

例1　$y=x^2+3x+5$
$=(x+1)^2+x+4$
$=(x-1)^2+5x+4$

と変形できることから，$y=x^2+3x+5$ の
$x=0$ における接線の式は，$y=3x+5$，
$x=-1$ における接線の式は，$y=x+4$，
$x=1$ における接線の式は，$y=5x+4$，
であることがわかる。

例2　$y=x^2+3x+5$
$=(x-p)^2+(2p+3)x-p^2+5$

から，$x=p$ における接線の式は，$y=(2p+3)x-p^2+5$ である。このことは，$x=p$ における接線の傾きが，$2p+3$ であること，すなわち $y'=2x+3$ を示している。

§3. 3次関数のグラフの接線について

以上のことは3次関数のグラフについても同様に考えることができる。

> $y=a(x-p)^2(x-q)+bx+c$ の $x=p$ における接線の式は，$y=bx+c$ である。さらにこの接線はもとの曲線と，$x=q$ で再び交わる。

証明　連立方程式

$$\begin{cases} y=a(x-p)^2(x-q)+bx+c \\ y=bx+c \end{cases}$$

を解くと，$a(x-p)^2(x-q)=0$ から，重解 $x=p$ と $x=q$ が求まる。したがって，$y=bx+c$ は $x=p$ において，$y=a(x-p)^2(x-q)+bx+c$ と接しており，また，$x=q$ で交わる。

（証明終）

例1　$y=x^3-5x^2+3x+2$
$=(x-1)^2(x-3)-4x+5$

より，$y=-4x+5$ は $x=1$ において，$y=x^3-5x^2+3x+2$ と接し，$x=3$ で交わる。

例 2　x^3-5x^2+3x+2 を $(x-2)^2$ で割ると，商が $x-1$ 余りが $-5x+6$ となるので，

$$x^3-5x^2+3x+2=(x-2)^2(x-1)-5x+6$$

したがって，曲線 $y=x^3-5x^2+3x+2$ の $x=2$ における接線の式は $y=-5x+6$ であり，その接線は $x=1$ で曲線と交わる。

例 3　$y=x^3-3x^2+2x+5=(x-1)^2(x-1)-x+6$ から，$y=-x+6$ は $x=1$ において，$y=x^3-3x^2+2x+5$ と接しており，また，$x=1$ は変曲点になっている。実際，$y'=3(x-1)^2-1$ $y''=6(x-1)$ から，$x=1$ の前後で y'' の符号が変わるので，$x=1$ は変曲点になっていることがわかる。

このことを一般的に示すと次のようになる。

> 3 次関数のグラフ $y=a(x-p)^3+bx+c$ は $x=p$ の点で変曲点をもち，その点での接線の式は，$y=bx+c$ である。

証明　連立方程式

$$\begin{cases} y=a(x-p)^3+bx+c \\ y=bx+c \end{cases}$$

を解くと，$a(x-p)^3=0$ から，3 重解 $x=p$ が求まる。したがって，$y=bx+c$ は $x=p$ において，$y=a(x-p)^3+bx+c$ と接している。また，$y''=6a(x-p)$ から，$x=p$ の前後で y'' の符号が変わる。したがって，$x=p$ の点は変曲点になっている。

（証明終）

§4. *n* 次関数のグラフの接線

さらに，一般に 2 次以上の関数のグラフについて次のことがいえる。

> 整式 $P(x)$ を $(x-p)^2$ で割った商を $Q(x)$，余りを $bx+c$ とおくと，
> $P(x)=(x-p)^2Q(x)+bx+c$ とかける。このとき，
> $y=P(x)=(x-p)^2Q(x)+bx+c$ の $x=p$ における接線の式は，$y=bx+c$ である。

証明　連立方程式

$$\begin{cases} y=(x-p)^2Q(x)+bx+c \\ y=bx+c \end{cases}$$

を解くと，$(x-p)^2Q(x)=0$ より，重解 $x=p$ が求まる。したがって，$y=bx+c$ は $x=p$ において，$y=P(x)=(x-p)^2Q(x)+bx+c$ と接している。

（証明終）

さらに，$Q(x)=0$ となる実数 x が存在するとき，その x において，直線 $y=bx+c$ は再び，$y=P(x)$ と共有点をもつ。

> 整式を使って表される関数を考えるとき，$x=p$ で，$y=bx+c$ と接する曲線は
> $$y=(x-p)^2Q(x)+bx+c$$
> とかける。

証明　$y=f(x)$ と $y=bx+c$ が $x=p$ で接するとき，$f(p)=bp+c$ と $f'(p)=b$ が成り立つ。

$f(p)-(bp+c)=0$ から因数定理を使って，

$$f(x)-(bx+c)=(x-p)g(x) \quad \cdots\cdots①$$

とかける。また①の両辺を微分すると

$$f'(x)-b=g(x)+(x-p)g'(x)$$

ここで，

$$f'(p)-b=g(p)+(p-p)g'(p)=0$$

から，再び因数定理を使って

$$g(x)=(x-p)h(x)$$

とかける。よって①から

$$f(x)-(bx+c)=(x-p)^2h(x)$$

となる。

したがって，

$$f(x)=(x-p)^2h(x)+bx+c \quad ①$$

とかける。

（証明終）

次に，x^n を $(x-p)^2$ で割った余りを考える。

$X=x-p$ とおくと，

$$\begin{aligned} x^n&=(X+p)^n \\ &=X^n+{}_n\mathrm{C}_1pX^{n-1}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}p^{n-2}X^2 \\ &\qquad+{}_n\mathrm{C}_{n-1}p^{n-1}X+p^n \\ &=(X^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1pX^{n-3}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}p^{n-2})X^2 \\ &\qquad+np^{n-1}X+p^n \end{aligned}$$

であるから，x^n を $(x-p)^2$ で割った余りは

$$np^{n-1}X+p^n=np^{n-1}x-(n-1)p^n$$

となる。

ゆえに，**$y=x^n$ の $x=p$ における接線の式は**

$$\boldsymbol{y=np^{n-1}x-(n-1)p^n}$$

である。そして，接線の傾きは $x=p$ のとき，np^{n-1} であるから，**$y=x^n$ のとき，$y'=nx^{n-1}$ であること**も導くことができる。

§5. 曲線が接するということ

これまでの考えを接線に限らずに2つの曲線について用いてみる。

> 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ があって，
> $$f(x)=a(x-p)^2+g(x)$$
> という関係を満たすとき，2つの曲線は $x=p$ で接する。

証明　連立方程式

$$\begin{cases} y=f(x)=a(x-p)^2+g(x) \\ y=g(x) \end{cases}$$

を解くと，$a(x-p)^2=0$ から，重解 $x=p$ が求まる。したがって，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ は $x=p$ で接している。

例1　$y=x^2$ のグラフについて，次のことがわかる。

$$\begin{aligned} y&=x^2 \\ &=(x-1)^2+2x-1 \\ &=2(x-1)^2-x^2+4x-2 \\ &=3(x-1)^2-2x^2+6x-3 \end{aligned}$$

と変形できることから，

$y=x^2$ は $x=1$ で $y=2x-1$，$y=-x^2+4x-2$，$y=-2x^2+6x-3$ と接する。

例2　$y=x^2$ と $x=1$ で接する曲線は次のようにして求めることもできる。

$y=x^2+(x-1)^2$

$y=x^2+2(x-1)^2$

$y=x^2-3(x-1)^2$ など

例3　さらに，$y=x^2$ と $x=1$ で接し，$x=2$ で交わるような曲線は次のようにして求めることができる。

$y=x^2+(x-1)^2(x-2)$

$y=x^2+2(x-1)^2(x-2)$

$y=x^2-3(x-1)^2(x-2)$ など

例4　また，$y=x^2$ と $x=1$ で接し，他に交点をもたないような曲線は，次のようにして求めることができる。

$y=x^2+(x-1)^2(x^2+1)$

$y=x^2+(x-1)^2(x^2+2)$　　など

以上のことより，一般に次のことがいえる。

> 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ があって，
> $$f(x)=a(x-p)^2Q(x)+g(x)$$
> という関係を満たすとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は $x=p$ で接し，$Q(x)=0$ の実数解が存在すれば，その点において共有点をもち，存在しなければ共有点をもたない。

証明　連立方程式

$$\begin{cases} y=f(x)=a(x-p)^2Q(x)+g(x) \\ y=g(x) \end{cases}$$

を解くと，$a(x-p)^2Q(x)=0$ から，重解 $x=p$ が求まる。したがって，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ は $x=p$ で接している。また，明らかに $Q(x)=0$ の実数解が存在すれば，その点において共有点をもち，存在しなければ共有点をもたない。

（証明終）

§6. 2次曲線の接線

円や楕円の接線についても，同様に考えて接線の式を求めることができる。

> 円 $x^2+y^2=r^2$ が円上の点 $(p,\ q)$ の座標を使って，$(x-p)^2+(y-q)^2=ax+by+c$ と変形できるとき，点 $(p,\ q)$ における接線の式は $ax+by+c=0$ である。

証明　連立方程式

$$\begin{cases} (x-p)^2+(y-q)^2=ax+by+c \\ ax+by+c=0 \end{cases}$$

を解くと，$(x-p)^2+(y-q)^2=0$ から，重解 $x=p$，$y=q$ が求まる。したがって，$ax+by+c=0$ は点 $(p,\ q)$ において，

$$(x-p)^2+(x-q)^2=ax+by+c$$

と接している。

（証明終）

これは次のように証明することもできる。

円 $(x-p)^2+(y-q)^2=ax+by+c$ の 点 $(p,\ q)$ における接線の式は，

$$(p-p)(x-p)+(q-q)(y-q)$$
$$=a\frac{p+x}{2}+b\frac{q+y}{2}+c$$

よって，

$$a(p+x)+b(q+y)+2c=0$$

ここで，点 $(p,\ q)$ は円周上の点であるから，

$$(p-p)^2+(q-q)^2=ap+bq+c$$

すなわち，$ap+bq+c=0$ を満たす。したがって，接線の式は $ax+by+c=0$ となる。

（証明終）

例 1　$x^2+y^2=10$ 上の点 $(1,\ 3)$ を使って，$(x-1)^2+(y-3)^2=-2x-6y+20$ と変形できるから，接線の式は $-2x-6y+20=0$　すなわち，$x+3y=10$ である。

楕円についても同様のことがいえる。

> 楕円 $lx^2+my^2=r^2$ 上の点 $(p,\ q)$ の座標を使って，楕円の式を
> $l(x-p)^2+m(y-q)^2=ax+by+c$ と変形できるとき，点 $(p,\ q)$ における接線の式は
> $ax+by+c=0$ である。

（証明略）

また，

> 直線 $ax+by+c=0$ 上の点 $(p,\ q)$ を用いて 2 次曲線の式を
> $$l(x-p)^2+m(y-q)^2=ax+by+c$$
> と作るとき，この 2 次曲線は点 $(p,\ q)$ において直線 $ax+by+c=0$ と接する。

証明　2 次曲線

$$l(x-p)^2+m(y-q)^2=ax+by+c$$

上の点 $(p,\ q)$ における接線の式を求めると，

$$l(p-p)(x-p)+m(q-q)(y-q)$$
$$=a\frac{x+p}{2}+b\frac{y+q}{2}+c$$

ここで，$ap+bq+c=0$ から，$ax+by+c=0$ が求まる。

（証明終）

§7. 2 次曲線が接するということ

次に，接線に限らず 2 次曲線が接する場合も含めて考える。

$x^2+y^2-10+a(x-1)^2+b(y-3)^2=0$ の式が，円・楕円などの 2 次曲線を表しているとき，この 2 次曲線は $x^2+y^2=10$ と点 $(1,\ 3)$ で接する。なぜなら，明らかに点 $(1,\ 3)$ は 2 つの曲線の共有点であり，その点における接線の式が共に $x+3y=10$ となり一致するからである。ここで，もとの 2 次曲線は，

$(a+1)(b+1)>0$ のときは楕円，
$(a+1)(b+1)=0$ のときは放物線，
$(a+1)(b+1)<0$ のときは双曲線，になる。

以上のことを参考にして，一般に次のことがいえる。

> 2 次曲線 $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$　……①
> 上の点 $(p,\ q)$ を使って，2 次曲線
> $$ax^2+by^2+cx+dy+e$$
> $$=l(x-p)^2+m(y-q)^2 \quad \text{……②}$$
> を作るとき，2 つの 2 次曲線①②は点 $(p,\ q)$ で接する。

証明　点 $(p,\ q)$ は曲線①上の点であるから，

$$ap^2+bq^2+cp+dq+e=0$$

を満たす。

点 $(p,\ q)$ の座標は曲線②も満たすので，点 $(p,\ q)$ は 2 つの曲線①②上の点である。

また，①の点 $(p,\ q)$ における接線の式は

$$apx+bqy+c\frac{p+x}{2}+d\frac{q+y}{2}+e=0$$

一方，②の点 $(p,\ q)$ における接線の式は

$$apx+bqy+c\frac{p+x}{2}+d\frac{q+y}{2}+e$$
$$=l(p-p)(x-p)+m(q-q)(y-q)$$

となって，一致するので 2 つの 2 次曲線①②は点 $(p,\ q)$ で接する。

（証明終）

ここで，

$(a-l)(b-m)>0$ のときは楕円，
$(a-l)(b-m)=0$ のときは放物線，
$(a-l)(b-m)<0$ のときは双曲線，

になる。

さらに，もっと一般的に次のことがいえる。

> 2 次曲線 $f(x,\ y)=0$ 上の点 $(p,\ q)$ を使って
> $$f(x,\ y)=l(x-p)^2+m(y-q)^2 \quad \text{……①}$$
> の式で表される 2 次曲線は，2 次曲線 $f(x,\ y)=0$ と点 $(p,\ q)$ で接する。

証明　2 次曲線 $f(x,\ y)=0$ 上の点 $(p,\ q)$ は明らかに，2 次曲線の式①を満たすので，点 $(p,\ q)$ は 2 つの曲線の共有点である。また，2 次曲線 $f(x,\ y)=0$ の点 $(p,\ q)$ における接線の式を，$f_{pq}(x,\ y)=0$ と書くと，①の接線の式は，

$$f_{pq}(x,\ y)=l(p-p)(x-p)+m(q-q)(y-q)$$

から，$f_{pq}(x,\ y)=0$ とかける。よって，2 つの 2 次曲線の接線は一致し，したがって，2 つの曲線は点 $(p,\ q)$ で接している。

（証明終）

§8. 終わりに

重解が表れるということを使って，考えられるグラフについての考察を行った。

整式の割り算の余りの式が，接線の式になっていること，またそこから微分の公式が導かれること，割り算の商を調べることで，共有点の座標がわかることなど，生徒にとってよく知っていると思っていること，あるいは別々のものだと思っていることの中に，意外なつながりや発見があることなど，生徒の数学に対する興味を起こさせるのに，適当な教材の一つになり得ると考える。

6節7節に表れる2次曲線の式については，必ず2次曲線を表していることを保障するものではない。その式が2次曲線を表すための，その他の条件を満たしていることを仮定している。

ここでは，重解を中心に使って，直線や曲線が接することについて考えてきたが，本稿の中にもときどき表れたように，同様の考え方で交点をもつ直線や曲線についても考えることができる。以下にそのほんの一例ではあるが，その考え方を示すことにする。

例1　$y=x^2$

$=(x-1)(x-2)+3x-2$

と変形できることから，$y=x^2$ は $x=1$, $x=2$ で $y=3x-2$ と交わることがわかる。

例2　$y=x^2$ と $x=1$, $x=2$ で交わる直線や曲線は，次のように考えて作ることもできる。

$$y=x^2+a(x-1)(x-2)$$

以上のことから，次のことが一般的にいえる。

> 曲線 $y=f(x)+a(x-p)(x-q)$ は $y=f(x)$ と $x=p$, $x=q$ で交わる。
> さらに，曲線
> $y=f(x)+a(x-p)(x-q)(x-r)$ は $y=f(x)$ と $x=p$, $x=q$, $x=r$ で交わる。

例3　$y=x^2$ と，$x=0$, 1, 2 で交わる直線や曲線は次のようにして作ることができる。

$$y=x^2+ax(x-1)(x-2)$$

例4　$y=x^2$ のグラフと $x=1$ のみを共有する曲線は次のようにして作ることができる。

$$y=x^2+a(x-1)(x^2+1)$$

例5　$y=x^2$ のグラフと共有点をもたない曲線は次のように考えて作ることもできる。

$$y=x^2+a(x^2+1)$$

したがって，一般的に次のことがいえる。

> $y=f(x)$ と $y=f(x)+Q(x)$ のグラフは，$Q(x)=0$ となる点で共有点をもつ。$Q(x)=0$ となる点がなければ共有点をもたない。

例6　また，$y=x^2$ と $(x,\ y)=(1,\ 1)$, $(2,\ 4)$ で交わる曲線は，次のように考えることもできる。

$$y-x^2=(y-1)(y-4)+(x-1)(x-2)$$
$$-y^2-2x^2+6y+3x-6$$

から，$y-x^2=0$ は，$(x,\ y)=(1,\ 1)(2,\ 4)$ で

$$y^2+2x^2-6y-3x+6=0$$

と共有点をもつ。

例7　$y=x^2$ と $(x,\ y)=(1,\ 1)$, $(2,\ 4)$ で交わる曲線は，次のように考えて作ることもできる。

$$y-x^2+a(x-1)(x-2)+b(y-1)(y-4)=0$$

例8　$x^2+y^2-10+a(x-1)(x+1)$

$$+b(y-3)(y+3)=0$$

は，$x^2-y^2=10$ と $(1,\ 3)$, $(-1,\ -3)$ で交わる曲線になっている。

したがって，一般的に次のことがいえる。

> 2次曲線 $f(x,\ y)=0$ があるとき，$f(x,\ y)=0$ 上の点 $(p,\ q)$ を使って，
> $f(x,\ y)+a(x-p)+b(y-q)=0$ を作るとき，この曲線は $f(x,\ y)=0$ と点 $(p,\ q)$ を共有する。

《参考文献》

〔1〕 片岡宏信「2次曲線の接線について(I)」
数研通信　No.68　pp.18～22

〔2〕 片岡宏信「2次曲線の接線について(II)」
数研通信　No.69　pp.18～21

(兵庫県立福崎高等学校)