3つ以上の「集合」の独立について

なかじま　まさき
中島　真樹

§1. はじめに

数研出版の教科書・改訂版数学Ｃには『２つの事象 A，B において $P_A(B)=P(B)$ が成り立つとき，(中略) 事象 B は事象 A に独立である』と事象の独立が定義されています。

さらに，そのすぐ後に２つの事象 A，B が互いに独立であるとは $P(A)\fallingdotseq 0$，$P(B)\fallingdotseq 0$ であって，

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ …($*$)

が成り立つことと必要十分であることが説明されています。

このことは実に便利で，演習問題に取り組んでいる際には非常に重宝するわけですが，A と B が対称的な($*$)が成り立つこと自体が独立の定義であるように思ってはいけない気がします。

そもそも独立の概念は事象 A における (その中の) 事象 B の割合と全体事象 U に対する事象 B の割合が同じ，つまり A が起こるか否かにかかわらず B が同じ確率で起こる状態をいいます。ですから概念自身は非対称です。

実際，上に引用した教科書でされている定義でも，$P_A(B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$ ですから，$B=\phi$ のときは定義されていますが，$A=\phi$ のときは定義されていません。

そしてこの非対称性が３つ以上の事象の独立を考えた場合に重要な気がして，また，そういったことを授業では話さないにせよ，授業をする私が理解できていることは大事なことと考え，自分自身のために整理してみました。

§2. 集合の独立

数研出版の教科書・改訂版数学Ａには『ある試行において，起こりうる場合全体の集合を U とするとき，この試行におけるどの事象も，U の部分集合で表すことができる。』とあります。また，任意の集合 A を考えて『集合 A から一つの要素を無作為に選ぶ』という試行を考えれば，A が起こりうる場合全体の集合とする試行となりますから本質的に事象と集合は同じものです。

したがって，以下，『事象』ではなく『集合』として記します。さらに集合 U を全体集合とし，集合とは U の部分集合のこととします。

定義１　A を集合とする。A の要素の個数を $n(A)$ で表し，$\dfrac{n(A)}{n(U)}$ を A の確率といい $P(A)$ で表す。

定義２　A，B を集合とする。A に対し，A に含まれる B の要素の割合 $\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$ を B の条件 A 付き確率といい，$P_A(B)$ で表す。

定義３　A，B を集合とする。B が A から独立であるとは，

$P_A(B)=P(B)$

が成り立つことをいう。ただし，任意の集合は空集合 ϕ から独立であるとする。また，この定義により，ϕ は任意の集合から独立である。

> **定理１**　A，B を集合とする。B が A から独立であることの必要十分条件は，
>
> $P(A\cap B)=P(A)P(B)$
>
> が成り立つことである。したがって，B が A から独立であるとき，A は B から独立である。

《証明》 略

今後，B が A から独立であるとき，A と B は互いに独立であるともいうことにする。

次に，独立の性質をいくつか整理します。そのなかで３つの集合の関係を扱っていきます。

> **定理２**　A，B を集合とする。A が B から独立であるとき，A が $\overline{B}$ から独立である。

《証明》 B と $\overline{B}$ は排反であるから，

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)-P(A)P(B)$$

$=P(A)(1-P(B))$
$=P(A)P(\overline{B})$
であるから，定理 1 よりAがBから独立ならばAは$\overline{B}$ から独立であるといえる。(終)

> **定理 3**　A，B，C を集合とする。B と C が排反であり，A がBから独立かつAがCから独立であるとき，A が $B\cup C$ から独立である。

《**証明**》

$$\begin{aligned}P(A\cap(B\cup C))&=P((A\cap B)\cup(A\cap C))\\&=P(A\cap B)+P(A\cap C)\\&=P(A)P(B)+P(A)P(C)\\&=P(A)(P(B)+P(C))\\&=P(A)P(B\cup C)\end{aligned}$$

であるから，定理 1 よりAは $B\cup C$ から独立であるといえる。(終)

定義 4　A，B，C を集合とする。<u>A，B，C が互いに独立である</u>とは，A とBが互いに独立，B とCが互いに独立，C とAが互いに独立であることをいう。

> **定理 4**　A，B，C を集合とする。A，B，C が互いに独立であることの必要十分条件は，
> $P(A\cap B)=P(A)P(B)$,
> $P(B\cap C)=P(B)P(C)$,
> $P(C\cap A)=P(C)P(A)$
> が成り立つことである。

《**証明**》定理 1 よりただちに導かれる。(終)

定義 5　A, B を集合とする。A, B と $\cap$，$\cup$，さらに補集合を表すための $\overline{}$ を用いて表すことのできる集合を<u>A，B で生成される集合</u>といい，その全体を $\mathfrak{S}\{A,\ B\}$ と表す。

A, B が異なる集合であるとき，A, B で生成される集合とは，互いに排反な集合 $A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap B$，$A\cap B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$ のいくつかの和集合で表される集合，および空集合 $\phi(=A\cap\overline{A})$ のことである。したがって，$\mathfrak{S}\{A,\ B\}$ は $2^4=16$ 個 の集合からなる集合族である。

定義 6　A，B，C を集合とする。A がBとCから独立であるとは，$\forall X\in\mathfrak{S}\{B,\ C\}$ に対し，A がXから独立であることをいう。

> **定理 5**　A，B，C を集合とする。A がBとCから独立であることの必要十分条件は，
> $P(A\cap B)=P(A)P(B)$,
> $P(A\cap C)=P(A)P(C)$,
> $P(A\cap(B\cap C))=P(A)P(B\cap C)$
> が成り立つことである。

《**証明**》まず，A がBとCから独立であるとする。B，C，$B\cap C\in\mathfrak{S}\{B,\ C\}$ であるから，定理 1 より

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$,
$P(A\cap C)=P(A)P(C)$,
$P(A\cap(B\cap C))=P(A)P(B\cap C)$

が成り立つ。

逆を示す。

$$\begin{aligned}&P(A\cap(B\cap\overline{C}))\\&=P((A\cap B)\cap\overline{C})\\&=P(A\cap B)-P((A\cap B)\cap C)\\&=P(A\cap B)-P(A\cap(B\cap C))\\&=P(A)P(B)-P(A)P(B\cap C)\\&=P(A)(P(B)-P(B\cap C))\\&=P(A)P(B\cap\overline{C})\end{aligned}$$

であるから，定理 1 よりAは $B\cap\overline{C}$ から独立。同様にAは $\overline{B}\cap C$ から独立。

$B\cap\overline{C}$，$\overline{B}\cap C$，$B\cap C$ は互いに排反であり，$B\cup C=(B\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap C)\cup(B\cap C)$ であるから，定理 3 によりAは $B\cup C$ から独立。したがって，定理 2 よりAは $\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{B\cup C}$ から独立である。

以上より，A は $B\cap\overline{C}$, $\overline{B}\cap C$, $B\cap C$, $\overline{B}\cap\overline{C}$ から独立であるから，定理 3 により，A は $\mathfrak{S}\{B,\ C\}$ の任意の集合から独立である。(終)

定義 7　A，B，C を集合とする。<u>A，B，C がそれぞれ独立である</u>とは，A がBとCから独立，B がCとAから独立，C がAとBから独立であることをいう。

『互いに独立』というと任意に取り出した 2 つの集合の相互関係として独立であると言っているように思えるので，誤解を恐れずあえて独自の用語を定義しました。

また，『A はBとCから独立』はあくまでAがB，C およびそれから生成される集合から独立であって，B とCの関係には一切触れていません。つまり，B とCは互いに独立でなくてもよい。ですから，何と

何の関係を論じているのかを明確にする必要があると感じ，このような定義をしました。

> **定理 6**　A，B，C を集合とする。A，B，C がそれぞれ独立であることの必要十分条件は，
> $P(A\cap B)=P(A)P(B)$,
> $P(B\cap C)=P(B)P(C)$,
> $P(C\cap A)=P(C)P(A)$,
> $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$
> が成り立つことである。

《証明》 A，B，C がそれぞれ独立であるとき，A は B と C から独立だから，定理 5 より
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$,
$P(C\cap A)=P(C)P(A)$,
$P(A\cap(B\cap C))=P(A)P(B\cap C)$
である。また，B は C から独立であるから，
$P(B\cap C)=P(B)P(C)$
となるから，
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$,
$P(B\cap C)=P(B)P(C)$,
$P(C\cap A)=P(C)P(A)$,
$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$
が成り立つ。
逆を示す。
$$\begin{aligned}P(A\cap(B\cap C))&=P(A\cap B\cap C)\\&=P(A)P(B)P(C)\\&=P(A)P(B\cap C)\end{aligned}$$
であるから，定理 5 より A は B と C から独立である。同様に B は C と A から独立，C は A と B から独立も示せる。(終)

§3. いくつかの例

> **［例 1］**　$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{1,2,3,7\}$，$B=\{1,2,3,8\}$，$C=\{1,4,5,6\}$ とする。

$n(U)=8$，$n(A)=4$，$n(B)=4$，$n(C)=4$ であるから，
$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{2},\ P(C)=\frac{1}{2}$$
よって，
$$P(A)P(B)=\frac{1}{4},$$
$$P(B)P(C)=\frac{1}{4},$$
$$P(C)P(A)=\frac{1}{4},$$
となる。
$n(A\cap B)=3$，$n(B\cap C)=1$，$n(C\cap A)=1$ であるから，
$$P(A\cap B)=\frac{3}{8},$$
$$P(B\cap C)=\frac{1}{8},$$
$$P(C\cap A)=\frac{1}{8}$$
となる。さらに $n(A\cap B\cap C)=1$ より
$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{8}$$
である。つまりこの例では，
$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$
になっているが，この条件だけでは，A，B，C のいずれも互いに独立でない例である。

> **［例 2］**　$U=\{1,2,3,4\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{2,4\}$，$C=\{3,4\}$ とする。

このとき，
$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$$
である。さらに，$A\cap B=B\cap C=C\cap A=\{4\}$ であるから，
$$P(A\cap B)=P(B\cap C)=P(C\cap A)=\frac{1}{4}$$
となる。したがって，
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$,
$P(B\cap C)=P(B)P(C)$,
$P(C\cap A)=P(C)P(A)$
であるから，A，B，C は互いに独立である。しかし，$A\cup B=\{1,2,4\}$，$(A\cup B)\cap C=\{4\}$ であるから，
$$P_{A\cup B}(C)=\frac{1}{3}\neq P(C)$$
となり，A，B，C はそれぞれ独立ではない。
これは A，B，C が互いに独立であってもそれぞれ独立にならない例，つまり
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$,
$P(B\cap C)=P(B)P(C)$,
$P(C\cap A)=P(C)P(A)$
であっても
$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$
は成り立たない例である。

［例 3］　$U=\{1,2,3,\cdots,11,12\}$，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,5,6\}$，$C=\{1,3,5,7,8,9\}$ とする。

このとき，$P(C)=\dfrac{1}{2}$ である。

さらに，$C\cap A=\{1,3\}$，$B\cap C=\{1,5\}$，$A\cap B=\{1,2\}$，$A\cap B\cap C=\{1\}$ であるから，

$$P_A(C)=\frac{1}{2}=P(C),$$

$$P_B(C)=\frac{1}{2}=P(C),$$

$$P_{A\cap B}(C)=\frac{1}{2}=P(C)$$

である。したがって，C は A と B から独立であるが，A と B は互いに独立にはなっていない。

実際，

$$P(A)=\frac{1}{3},\quad P_B(A)=\frac{1}{2}$$

である。

§4.　3 つ以上の集合の独立

上で考えた『独立』を n 個の集合について拡張してみました。

定義 8　U の部分集合の族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ があり，そのうち k 個 $(1\leqq k\leqq n)$ の集合 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ と $\cap$，$\cup$，さらに補集合を表すための $\overline{\quad}$ を用いて表すことのできる集合を $A_1, A_2, \cdots, A_n$ から生成される集合といい，その集合すべての族を $\mathfrak{G}\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ と表すことにする。

一般に，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ から生成される異なる集合は 2^{2^n} 個存在する。

$n=2$ のときは $2^{2^2}=16$，$n=4$ のときは $2^{2^4}=256$，$n=5$ のときは $2^{2^5}=65534$ となります。

全集合 U の部分集合の族 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ を考える。

B_i は A_i または $\overline{A_i}$ のいずれか一方を表すものとする。

$B=\bigcap_{i=1}^{n}B_i$ を $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ の破片と呼ぶことにする。

このとき，$\forall X\in\mathfrak{G}\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ をとると，X は $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ のいくつかの破片の和集合で表される。

定義 9　U の部分集合 A_1，A_2，$\cdots$，A_n があるとする。n 以下の任意の異なる自然数 i，j に対して，A_i と A_j が互いに独立であるとき，すなわち，$P(A_i\cap A_j)=P(A_i)P(A_j)$ が成り立つとき，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ は互いに独立であるという。

定義 10　A が $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ から独立であるとは，A は $\forall X\in\mathfrak{G}\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ から独立であることをいう。

> **定理 7**　A が $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ から独立であることの必要十分条件は，$\{1,2,3,\cdots,n\}$ の空でない任意の部分集合 I に対し，
> $$P(A\cap(\bigcap_{i\in I}A_i))=P(A)P(\bigcap_{i\in I}A_i)$$
> が成り立つことである。

《証明》 A が $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ から独立であるとき，定義よりただちに

$$P(A\cap(\bigcap_{i\in I}A_i))=P(A)P(\bigcap_{i\in I}A_i)$$

が示される。

逆に $\{1,2,3,\cdots,n\}$ の空でない任意の部分集合 I に対し，$P(A\cap(\bigcap_{i\in I}A_i))=P(A)P(\bigcap_{i\in I}A_i)$ であるときに A は $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ から独立であることを示す。

$\forall X\in\mathfrak{G}\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ とする。

いま，B_α を $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ の破片とし，X は B_α の和集合 $\bigcup_{\alpha}B_\alpha$ で表されるとする。

$$\begin{aligned}
&P(A\cap(\overline{A_1}\cap(\bigcap_{i=2}^{n}A_i)))\\
&\quad=P(\overline{A_1}\cap(A\cap(\bigcap_{i=2}^{n}A_i)))\\
&\quad=P(A\cap(\bigcap_{i=2}^{n}A_i))-P(A_1\cap(A\cap(\bigcap_{i=2}^{n}A_i)))\\
&\quad=P(A\cap(\bigcap_{i=2}^{n}A_i))-P(A\cap(A_1\cap(\bigcap_{i=2}^{n}A_i)))\\
&\quad=P(A)P(\bigcap_{i=2}^{n}A_i)-P(A)P(A_1\cap(\bigcap_{i=2}^{n}A_i))\\
&\quad=P(A)(P(\bigcap_{i=2}^{n}A_i)-P(A_1\cap(\bigcap_{i=2}^{n}A_i)))\\
&\quad=P(A)P(\overline{A_1}\cap(\bigcap_{i=2}^{n}A_i))
\end{aligned}$$

であるから，A は $\overline{A_1}\cap(\bigcap_{i=2}^{n}A_i)$ から独立となる。

このことを適宜帰納的に用いることによって，A は

各 B_α から独立であることが示せる。

さらに，各 B_α は排反であるから，

$$
\begin{aligned}
P(A\cap X)&=P(A\cap(\bigcup_{\alpha} B_\alpha))\\
&=P(\bigcup_{\alpha}(A\cap B_\alpha))\\
&=\sum_{\alpha}P(A\cap B_\alpha)\\
&=\sum_{\alpha}P(A)P(B_\alpha)\\
&=P(A)\Big(\sum_{\alpha}P(B_\alpha)\Big)\\
&=P(A)P(\bigcup_{\alpha} B_\alpha)\\
&=P(A)P(X)
\end{aligned}
$$

ゆえに，A は $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ から独立である。

定義 11　$A_1, A_2, \cdots, A_n$ の任意の 1 つ A_i を選び，A_i を除く集合から生成される集合の族

$$\Cup\{A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, A_{i+1}, \cdots, A_n\}$$

から任意に集合 X を選ぶ。そのようにして選ばれた A_i と X が互いに独立であるとき，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ はそれぞれ独立であるという。

すると，定理 7 から次の定理が示される。

定理 8　$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ がそれぞれ独立であることの必要十分条件は，$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ の空でない任意の部分集合 I に対し，

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i)=\prod_{i\in I}P(A_i)$$

が成り立つことである。ただし，ここで $\prod_{i\in I}P(A_i)$ は $P(A_i)$ $(i\in I)$ の積を表す。

《参考文献》

〔1〕　数研出版，改訂版数学A

〔2〕　数研出版，改訂版数学C

（大阪府　清教学園高等学校）