不等式の証明に役立つ不等式と接線の利用について

柳田（やなぎだ）　五夫（いつお）

§1. はじめに

不等式の証明に役立つ不等式としては，相加平均・相乗平均を含む不等式
「$a_i>0$ ($i=1$, 2, …, n) のとき
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$
が成り立つ。」
や，コーシー・シュワルツの不等式
「a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_n が実数のとき
$$(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)$$
$$\geqq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
が成り立つ。」
が有名であるが，ここでは大学入試に出題された2つの不等式を紹介したい。

また，不等式を証明するために，接線の利用についても述べたい。

§2. 有用な不等式 1

[1] a_1, a_2, …, a_n, x_1, x_2, …, x_n が実数で，$x_1>0$, $x_2>0$, …, $x_n>0$ のとき
$$\frac{a_1{}^2}{x_1}+\frac{a_2{}^2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n{}^2}{x_n} \geqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$
が成り立つ。等号は
$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\cdots=\frac{a_n}{x_n}$$
のときに限る。

この不等式は，次の問題に表れた不等式を一般化したものである。

問題 1　a, b, c を正の定数とするとき，

(1) 正の数 x, y の和が一定数 h に等しいならば
$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y} \geqq \dfrac{(a+b)^2}{h}$ となることを証明せよ。

(2) 正の数 x, y, z の和が一定数 k に等しいとき
$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}$ の最小値を求めよ。

〔名古屋大〕

［[1]**の証明**］ 数学的帰納法で証明する。

(i) $n=2$ のとき
$$\frac{a_1{}^2}{x_1}+\frac{a_2{}^2}{x_2}-\frac{(a_1+a_2)^2}{x_1+x_2}=\frac{(a_1x_2-a_2x_1)^2}{x_1x_2(x_1+x_2)} \geqq 0$$
から成り立つことがわかる。等号は $\dfrac{a_1}{x_1}=\dfrac{a_2}{x_2}$ のとき成り立つ。

(ii) n のとき成り立つと仮定すると，$n+1$ のときも
$$\frac{a_1{}^2}{x_1}+\frac{a_2{}^2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n{}^2}{x_n}+\frac{a_{n+1}{}^2}{x_{n+1}}$$
$$\geqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\frac{a_{n+1}{}^2}{x_{n+1}}$$
$$\geqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}$$
より不等式は成り立つ。等号は
$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\cdots=\frac{a_n}{x_n} \text{ かつ}$$
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=\frac{a_{n+1}}{x_{n+1}} \text{ から}$$
$\dfrac{a_1}{x_1}=\dfrac{a_2}{x_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{x_n}=\dfrac{a_{n+1}}{x_{n+1}}$ のとき成り立つ。

(i), (ii)よりすべての $n \geqq 2$ について不等式は成り立つ。■

［**注 1**］ コーシー・シュワルツの不等式を使って，[1]の不等式を証明できる。
$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{a_1{}^2}{x_1}+\frac{a_2{}^2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n{}^2}{x_n}\right)$$
$$\geqq \left(\sqrt{x_1}\cdot\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_2}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{x_2}}+\cdots+\sqrt{x_n}\cdot\frac{a_n}{\sqrt{x_n}}\right)^2$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$$

［**注 2**］ 逆に $b_i \neq 0$ ($i=1$, 2, …, n) のとき，コーシー・シュワルツの不等式が証明できる。

$$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2$$
$$=\frac{a_1{}^2b_1{}^2}{b_1{}^2}+\frac{a_2{}^2b_2{}^2}{b_2{}^2}+\cdots+\frac{a_n{}^2b_n{}^2}{b_n{}^2}$$
$$\geqq\frac{(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2}{b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2}$$ から，
$$(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)$$
$$\geqq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
を得る。 ■

$\boxed{1}$の不等式の使い方をみていきたい。まず，基本的な不等式として，a，b，c を実数とするとき，
$$a^2+b^2\left(=\frac{a^2}{1}+\frac{b^2}{1}\right)\geqq\frac{(a+b)^2}{2}$$
$$a^2+b^2+c^2\geqq\frac{(a+b+c)^2}{3}$$ が示せる。

問題 2　$x_1>0$，$x_2>0$，…，$x_n>0$ で $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ のとき，次の不等式を証明せよ。
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\geqq n^2$$

［**解答**］ $\boxed{1}$の不等式を用いると
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1^2}{x_1}+\frac{1^2}{x_2}+\cdots+\frac{1^2}{x_n}$$
$$\geqq\frac{(1+1+\cdots+1)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$
$$=\frac{n^2}{1}=n^2$$ ■

［**注**］ $(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqq n^2$

から $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\geqq n^2$ を示すこともできる。

問題 3　(APMO 1991) a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n が $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ を満たす正の実数のとき，次の不等式を証明せよ。
$$\frac{a_1{}^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2{}^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n{}^2}{a_n+b_n}$$
$$\geqq\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

［**解答**］ $\boxed{1}$の不等式を使うと
$$\frac{a_1{}^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2{}^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n{}^2}{a_n+b_n}$$
$$\geqq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)}$$
$$=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}$$
$$=\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$ ■

§3. 有用な不等式 2

問題 4　a，b，c，x，y，z はすべて正の数を表すとき，次の不等式を証明せよ。

(1)　$(b+c)(c+a)(a+b)\geqq 8abc$

(2)　$xyz\geqq(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$

〔東京工大〕

(2)では，$a=y+z-x$，$b=z+x-y$，$c=x+y-z$ とおくと $b+c=2x$，$c+a=2y$，$a+b=2z$ となり，(1)と同じ不等式を証明すればよいことになるが，$a>0$，$b>0$，$c>0$ かどうかわからないので工夫が必要になる。

［**解答 1**］ x，y，z に関して対称式なので，$x\geqq y\geqq z$ と仮定する。$a=y+z-x$，$b=z+x-y$，$c=x+y-z$ とおくと $b>0$，$c>0$ はいえる。また，$b+c=2x$，$c+a=2y$，$a+b=2z$ より
$$xyz\geqq(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$
$$\iff\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\geqq abc$$
$$\iff(b+c)(c+a)(a+b)\geqq 8abc \qquad \cdots\cdots①$$

a については $a>0$ または $a\leqq 0$ となるから場合分けをする。

(i)　$a>0$ の場合

(1)から，①は成り立つ。

(ii)　$a\leqq 0$ の場合

$b+c=2x$，$c+a=2y$，$a+b=2z$ より $b+c>0$，$c+a>0$，$a+b>0$ であるから ①の左辺>0，右辺$\leqq 0$ となる。よって①は成り立つ。 ■

［**解答 2**］ x，y，z に関して対称式なので，$x\geqq y\geqq z$ と仮定すると，$z+x-y>0$，$x+y-z>0$ となるが，$y+z-x$ の符号がわからないので場合分けをする。

(i)　$y+z-x\leqq 0$ のときは，(2)の左辺>0，右辺$\leqq 0$ より(2)の不等式は成り立つ。

(ii)　$y+z-x>0$ のときは
$$[(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)]^2\leqq(xyz)^2 \qquad \cdots\cdots②$$
を証明すればよい。
$$(y+z-x)(z+x-y)=z^2-(x-y)^2\leqq z^2$$
$$(z+x-y)(x+y-z)=x^2-(y-z)^2\leqq x^2$$
$$(x+y-z)(y+z-x)=y^2-(z-x)^2\leqq y^2$$
したがって，②は成り立つ。 ■

［**解答 3**］ x，y，z に関して対称式なので，
$x \geqq y \geqq z$ と仮定して，$x-y=p \geqq 0$，$y-z=q \geqq 0$ とおくと

$$xyz-(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$
$$=(z+p+q)(z+q)z-(z-p)(z+p)(z+p+2q)$$
$$=(p^2+pq+q^2)z+p^2(p+2q) \geqq 0$$

したがって，(2)の不等式は成り立つ。 ■

［**解答 4**］ x，y，z に関して対称式なので，
$x \geqq y \geqq z$ と仮定する。

$$xyz-(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$
$$=x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)$$
$$=(x-y)[x(x-z)-y(y-z)]+z(x-z)(y-z)$$

$x \geqq y \geqq 0$，$x-z \geqq x-y \geqq 0$ から $x(x-z) \geqq y(y-z)$ で，仮定から，左辺のすべての項は非負であるから

$$(x-y)[x(x-z)-y(y-z)]+z(x-z)(y-z) \geqq 0$$

したがって，(2)の不等式は成り立つ。 ■

［**注 1**］ (2)の不等式は，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ のときに成立することが容易にわかる。

また，等号成立条件は $x>0$，$y>0$，$z>0$ のとき $x=y=z$ であることがわかる。

x，y，z のうちに 0 がある場合，例えば $x=0$ のときは等号成立は $0=-(y+z)(y-z)^2$ より $y=z=0$ または $y=z$ より $x=y=z=0$ または $x=0$，$y=z$ となる。

まとめると，等号成立は $x=y=z\,(\neq 0)$ または $y=z$，$x=0$ または $z=x$，$y=0$ または $x=y$，$z=0$ のときとなる。

［**注 2**］ $xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ の右辺を展開して整理すると

$$x^3+y^3+z^3+3xyz$$
$$\geqq x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$$

となる。

$(x+y+z)^3+9xyz \geqq 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$ についても両辺を展開して整理すれば同じ式が出てくるので，次のようにまとめることができる。

> 2 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つ。
>
> a） $xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$
>
> b） $x^3+y^3+z^3+3xyz$
> $\geqq x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$
>
> c） $(x+y+z)^3+9xyz$
> $\geqq 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$
>
> d） $x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)$
> $+z(z-x)(z-y) \geqq 0$
>
> 等号は $x=y=z\,(\neq 0)$ または $y=z$，$x=0$ または $z=x$，$y=0$ または $x=y$，$z=0$ のときに成り立つ。

2 の d）は次の Schur の不等式の $r=1$ の場合になっている。

> **定理（Schur）** $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ で $r>0$ のとき，次の不等式が成り立つ。
>
> $$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)$$
> $$+z^r(z-x)(z-y) \geqq 0$$
>
> 等号は $x=y=z\,(\neq 0)$ または $y=z$，$x=0$ または $z=x$，$y=0$ または $x=y$，$z=0$ のときに成り立つ。

§4. 接線を利用して不等式を証明する

> **問題 5** （USAMO Summer Program 2002）
> $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき
>
> $$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 3$$
>
> が成り立つことを証明せよ。

［**解答**］ 不等式の左辺の式の分母と分子の次数は同じであるから，

$p=\dfrac{a}{a+b+c}$，$q=\dfrac{b}{a+b+c}$，$r=\dfrac{c}{a+b+c}$ とおくと $p>0$，$q>0$，$r>0$，$p+q+r=1$ となる。

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 3$$
$$\Longleftrightarrow \left(\frac{2p}{q+r}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2q}{r+p}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2r}{p+q}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 3$$
$$\Longleftrightarrow \left(\frac{2p}{1-p}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2q}{1-q}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2r}{1-r}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 3$$

$f(x)=\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}\,(0<x<1)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{4}{3}\left(\frac{2x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{(1-x)^2}$$

$p=q=r=\dfrac{1}{3}$ のとき，不等式の等号が成り立つから，$y=f(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right)$ における接線の利用を考える。$f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=3$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=1$ であるから接線の方

程式は，$y=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+1$ すなわち $y=3x$ となる。

次に，$y=f(x)$と接線 $y=3x$ の上下関係を調べる。

$$[f(x)]^3-(3x)^3=\left(\frac{2x}{1-x}\right)^2-(3x)^3$$
$$=\frac{x^2(4-27x+54x^2-27x^3)}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{x^2(3x-1)^2(4-3x)}{(1-x)^2}\geqq 0$$

したがって，$f(x)\geqq 3x$ が成り立つから
$$f(p)+f(q)+f(r)\geqq 3(p+q+r)=3 \quad ■$$

［**注**］ $f''(x)=\dfrac{4(6x-1)}{9x(1-x)^3}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{3}}$ より，凸関数ではないので，後述の Jensen の定理は使えない。

次の問題は，誘導がないと解きにくいかもしれない。

> **問題 6** (1) $p>0$，$q>0$，$p+q=1$ のとき，関数 $f(x)=x^2$ について次の不等式が成り立つことを示せ。
> $$f(px_1+qx_2)\leqq pf(x_1)+qf(x_2)$$
> (2) $a>0$，$b>0$，$a+b=1$ のとき，(1)を用いて次の不等式が成り立つことを示せ。
> $$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqq\frac{25}{2}$$
> 〔早稲田大〕

ここでは，一般化して次の問題を考える。

> **問題 7** $x_1>0$，$x_2>0$，…，$x_n>0$，$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ のとき
> $$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\cdots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2$$
> の最小値を求めよ。

［**解答 1**］ $g(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$ $(0<x<1)$ とおくと
$$g'(x)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$y=g(x)$ 上の点$\left(\dfrac{1}{n},\ \dfrac{(n^2+1)^2}{n^2}\right)$における接線の方程式は
$$y=\frac{2(1-n^4)}{n}x+\frac{3n^4+2n^2-1}{n^2}$$
となるから，$y=g(x)$ との上下関係を調べる。
$$g(x)-\frac{2(n-n^5)x+3n^4+2n^2-1}{n^2}$$
$$=\frac{n^2x^4+2(n^5-n)x^3-(3n^4-1)x^2+n^2}{n^2x^2}$$
$$=\frac{(nx-1)^2(x^2+2n^3x+n^2)}{n^2x^2}\geqq 0$$

したがって
$$g(x)\geqq\frac{2(n-n^5)x+3n^4+2n^2-1}{n^2}$$
が成り立つから
$$g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)$$
$$\geqq\frac{2(n-n^5)(x_1+x_2+\cdots+x_n)+n(3n^4+2n^2-1)}{n^2}$$
$$=\frac{2(n-n^5)+n(3n^4+2n^2-1)}{n^2}$$
$$=\frac{(n^2+1)^2}{n}$$

よって，$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ のとき，

最小値 $\dfrac{(n^2+1)^2}{n}$ をとる。

［**解答 2**］ $\boxed{1}$の不等式から
$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\cdots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2$$
$$=\frac{\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2}{1}+\frac{\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2}{1}+\cdots+\frac{\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2}{1}$$
$$\geqq\frac{\left(x_1+\frac{1}{x_1}+x_2+\frac{1}{x_2}+\cdots+x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2}{1+1+\cdots+1}$$
$$=\frac{\left(1+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)^2}{n}$$
$$\geqq\frac{(1+n^2)^2}{n}\quad(\because\ \text{問題 2})$$

等号は，$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ のときである。

よって，$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ のとき，

最小値 $\dfrac{(n^2+1)^2}{n}$ をとる。

［**注**］ ［解答 1］で用いた
$$g(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\ (0<x<1)$$
について，$g''(x)=2\left(1+\dfrac{3}{x^4}\right)>0$ より，$g(x)$ は下に凸である。したがって，この問題は Jensen の不等式

> **定理（Jensen）** 区間 $(a,\ b)$ において $f''(x)>0$ のとき，$a<x_i<b$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

ならば，$w_i>0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$\sum_{i=1}^{n} w_i=1$ に対して

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

が成り立つ。等号は $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときに限る。

を用いると

$$\frac{g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)}{n}$$
$$\geqq g\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=g\left(\frac{1}{n}\right)$$

から，$g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n) \geqq \frac{(n^2+1)^2}{n}$ が成り立ち，簡単に解くことができる。

§5. おわりに

$\boxed{1}$の不等式は，コーシー・シュワルツの不等式と似た不等式なので，問題によりコーシー・シュワルツの不等式と使い分けるとよい。

また，接線を利用して不等式を証明する方法も，高校生にぜひ紹介したい解法である。

最後に，§3で扱わなかった$\boxed{2}$の不等式が使える問題を紹介したい。

問題8　正の数 a，b，c について，
$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$
と $3abc$ の大小を比較せよ。〔類　東邦大・薬〕

［**解答**］　$P=a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$ と $Q=3abc$ の大小を比較すればよい。

$$P-Q=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) -(a^3+b^3+c^3+3abc)$$

と変形できるから，$\boxed{2}$ b) より $P-Q \leqq 0$ となる。
等号成立は $a=b=c$ のときに限る。　■

問題9　(Mihai, Piticari, Dan Popescu)
正の数 a，b，c が $a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ。
$5(a^2+b^2+c^2) \leqq 6(a^3+b^3+c^3)+1$

［**解答**］　不等式を同次化する。

$$5(a^2+b^2+c^2) \leqq 6(a^3+b^3+c^3)+1$$
$$\Leftrightarrow 5(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \leqq 6(a^3+b^3+c^3)+(a+b+c)^3$$
$$\Leftrightarrow a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \leqq a^3+b^3+c^3+3abc$$

最後の不等式は，$\boxed{2}$ b) より成り立つ。　■

《参考文献》

〔1〕　柳田五夫，接線を利用した台形の面積で，ある不等式を証明する，数研通信　No.60
〔2〕　H.Lee, *Topics in Inequalities-Theorems and Techniques*

(元　栃木県立佐野高等学校)