辺の長さと面積が整数で，数値上周の長さと面積が等しい三角形，四辺形について

仁平（にへい）　政一（まさかず）

§1. はじめに

最初に次の問題を考えてみよう。

> **問題1**　辺の長さも面積も整数である三角形が，数値上，3辺の和と面積が等しい。このような三角形をすべて決定せよ。

実は，この問題は，

「$xyz=4(x+y+z)$ の正の整数解を求めよ」

という不定方程式に帰着する。

数学Aに2元1次不定方程式が登場している（例えば，文献［4，p.135］)。

そこで，本稿の目的は，問題1の解答を紹介し，それに関連する教材開発について述べることである。なお，問題1とその解答は文献［1，pp.220-221］による。

§2. 問題1の解答と教材としての意義

まず，解答を紹介する。

a，b，c を三角形の3辺の長さとし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とする。このとき，三角形の面積を S とすると，ヘロンの公式から

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

となる。条件より，

$$2s=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

すなわち

$$(s-a)(s-b)(s-c)=4s \qquad ①$$

を得る。ここで，$x=s-a$，$y=s-b$，$z=s-c$ とおくと，①は

$$xyz=4(x+y+z) \qquad ②$$

となる。あとは，②の正の整数解を求めればよい。一般性を失うことなく，

$$x\geqq y\geqq z$$

と仮定してよい。②は

$$x=\frac{4}{z}+\frac{4(z^2+4)}{z(yz-4)} \qquad ③$$

と変形できる。

z を固定して，x を y の関数とみなすと，x は減少関数である。

z は正の整数であるから，$z=1$，2，… の場合を考えればよい。

(i)　$z=1$ のとき，③は

$$x=4+\frac{20}{y-4}$$

となる。

x は整数なので，$y-4$ は20の約数でなくてはならないから，

$$y=5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 14,\ 24$$

である。ところで，$x\geqq y$ と仮定しているから，

$$(x,\ y)=(24,\ 5),\ (14,\ 6),\ (9,\ 8)$$

である。

(ii)　$z=2$ のとき，③は

$$x=2+\frac{8}{y-2}$$

となる。この場合は，(i)と同様にして

$$(x,\ y)=(10,\ 3),\ (6,\ 4)$$

を得る。

(iii)　$z=3$ のとき，③は

$$x=\frac{4}{3}+\frac{52}{3(3y-4)}$$

となる。

$y=3$ のときは，正の整数解はない。$y\geqq 4$ のときは，$x<y$ となり，やはり解はない。

③において，$y=z$ とおくと，

$$x=\frac{8z}{z^2-4}=\frac{4}{z-2}+\frac{4}{z+2}$$

となる。x は減少関数であるから，$z\geqq 4$ とすると，

$x \leqq \dfrac{8}{3}$

もし，$z \geqq 4$ で $y \geqq z$ とすると，$x < y$

よって，解はない。したがって，求める解は次の通りである。

x	y	z	a	b	c	S
24	5	1	6	25	29	60
14	6	1	7	15	20	42
9	8	1	9	10	17	36
10	3	2	5	12	13	30
6	4	2	6	8	10	24

■

上記の解答からわかるように，数学Aの範囲で解くことができ，その解答を通して，不定方程式の標準的な解き方を身に付けることができる。また，単に

> 不定方程式 $xyz=4(x+y+z)$ の正の整数解を求めよ。

という形で問題を出題するより，図形と関連させることで，より面白い問題になっている。

このようなことから教材としての価値が十分あると考える。

次に，この問題の四辺形バージョンを考えてみよう。

§3. 周の長さと面積が数値上等しい長方形

手始めに，最もシンプルな長方形の場合を考える。

> **問題 2**　辺の長さが整数で，周の長さと面積が数値上等しくなるような長方形をすべて求めよ。

解　長方形の縦，横の辺の長さをそれぞれ x，y とする。このとき，条件より

$$xy=2(x+y) \quad ④$$

となる。

この不定方程式の正の整数解を求めればそれが，問題 2 の解である。

④で $x=2$ とすると，$0=4$ という矛盾が生じるので，$x \neq 2$ と仮定してよい。このとき，④は

$$y=2+\frac{4}{x-2}$$

と変形できるから，求める解は次のようになる。

x	y	S
3	6	18
4	4	16
6	3	18

■

§4. 円に内接して外接する四辺形

四辺形の 4 辺の長さをそれぞれ a，b，c，d とし，$s=\dfrac{(a+b+c+d)}{2}$ とする。このとき，四辺形の面積を S とするならば，

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

となることが，Bretschneider の公式として知られている（[2，p.21]）。

しかし，この公式を用いて，周の長さと（数値上）面積が等しい四辺形を決定しようとしても，とても手に負えない。

ところが，もし，四辺形が円に内接し外接するときは，

$$S=\sqrt{abcd} \quad (\mathrm{I})$$

となる（[2，p.32]）。

この公式は，Bretschneider の公式を利用しなくても，容易に示すことができる。

少々横道にそれるが，日頃馴染みの薄い式なので，念のため証明を与えておこう。

[公式(I)の証明]

図 1 の四辺形 ABCD において，AD$=a$，AB$=b$，BC$=c$，CD$=d$，BD$=f$ とおく

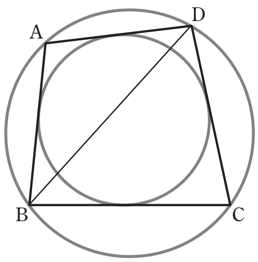

図 1

四辺形の面積を S とおくと，

$$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}ab\sin A+\frac{1}{2}cd\sin C$$

四辺形 ABCD は円に内接しているから，

$$A+C=180^\circ$$

よって　$2S=(ab+cd)\sin A$

を得る。この式を平方すると

$$4S^2=(ab+cd)^2\sin^2 A \quad ⑤$$

他方，

$$f^2=a^2+b^2-2ab\cos A=c^2+d^2-2cd\cos C$$

ここで，$\cos C=-\cos A$ であることに注意すれば，

$$\cos A=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

を得る。よって，

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A$$
$$=\frac{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}$$
$$=\frac{\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}}{4(ab+cd)^2}$$

円に外接しているから，$a+c=b+d$

ゆえに，

$$\sin^2 A(=1-\cos^2 A)=\frac{16abcd}{4(ab+cd)^2} \quad ⑥$$

⑥を⑤に代入すれば，

$$4S^2=(ab+cd)^2\frac{16abcd}{4(ab+cd)^2}$$

となるから，求める結果が得られる。 ■

この証明は数学Iの範囲で可能であり，公式(I)それ自体が「図形と計量」における面白い問題になるように思われる。

ここで，本題に戻ろう。そこで，次の問題を考えることにする。

> **問題3** 四辺形ABCDは円に内接し外接して，しかも AB=CD とする。このとき，各辺の長さと面積が整数で，数値上周の長さと面積が等しくなるような四辺形をすべて決定せよ。

解 AD$=x$，AB$=y$，BC$=z$，CD$=y$ とおく。このとき，円に外接しているから，

$$x+z=2y \quad ⑦$$

また，公式(I)と条件より

$$\sqrt{xy^2z}=x+2y+z \quad ⑧$$

⑦と⑧より，

$$\sqrt{xy^2(2y-x)}=4y$$

を得る。$y>0$ であるから，問題3は

$$x(2y-x)=16 \quad ⑨$$

という不定方程式の正の整数解を求める問題に帰着する。この式は

$$y=\frac{x}{2}+\frac{8}{x} \quad ⑩$$

と変形できる。yは整数であるから，⑩の右辺が整数となるようなxを求めればよい。

$x>9$ のときは，$0<\frac{8}{x}<1$

よって，$x>9$ でxが偶数のときは，$\frac{x}{2}+\frac{8}{x}$ は整数にならないから，$x>9$ のときは，奇数の場合を考えればよい。

そこで，$x=2m+1$（mは非負の整数）とおくと，

$x>9$ より $m\geqq 5$

また，

$$\frac{x}{2}+\frac{8}{x}=\frac{2m+1}{2}+\frac{8}{2m+1}=m+\frac{1}{2}\left(1+\frac{8}{m+\frac{1}{2}}\right)$$

となるから，$1+\frac{8}{m+\frac{1}{2}}$ が2の倍数でなくてはならない。そこで，

$$1+\frac{8}{m+\frac{1}{2}}=2k \ （k\text{は正の整数}）$$

とおくと，この式は

$$(2m+1)(2k-1)=16$$

と変形できる。$m\geqq 5$ より

$$2m+1=16,\ 2k-1=1$$

の場合しかない。このとき，$m=\frac{15}{2}$ となり，mが整数ということに矛盾する。ゆえに，$x>9$ のときは解はない。よって，

$1\leqq x\leqq 8$ の場合を調べることにより，

$(x,\ y)=(2,\ 5),\ (4,\ 4),\ (8,\ 5)$

を得る。したがって，求める結果は次のようになる。

x	y	z	$w(=y)$	S
2	5	8	5	20
4	4	4	4	16
8	5	2	5	20

■

次に，外接という条件をはずして，円に内接しているという条件のもとで考える。

§5. 円に内接する四辺形

四辺形が円に内接するときは，Bretschneiderの公式より

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad (II)$$

がただちに得られるが，(Bretschneiderの公式を用いない) 直接的証明は，例えば文献 [3，pp73-74] にある。なお，(II)はBrahmaguptaの公式と呼ばれている（[2]，p.21)。

円に内接して，4辺がすべて等しい場合は，§3の結果に含まれるから，ここでは，次の問題を考える。

問題 4　四辺形 ABCD は円に内接し，しかも AD＝AB＝BC とする。このとき，各辺の長さと面積が整数で，数値上周の長さと面積が等しくなるような四辺形をすべて決定せよ。

解　AD＝a，AB＝b，BC＝c，CD＝d とおく。
公式(II)より，

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}=a+b+c+d \quad ⑪$$

$x=s-a$，$y=s-b$，$z=s-c$，$w=s-d$ とおくと，⑪は

$$\sqrt{xyzw}=x+y+z+w \quad ⑫$$

となる。ところで，条件より

$$x=y=z$$

となるから，⑫は

$$\sqrt{x^3w}=3x+w \quad ⑬$$

となる。したがって，問題 4 はこの不定方程式の正の整数解を求めることに帰着する。
⑬の両辺を平方すると

$$x^3w=9x^2+6xw+w^2$$

これを w に関する 2 次方程式とみなして解くと

$$w=\frac{x^3-6x\pm x^2\sqrt{x^2-12}}{2}$$

x^2-12 は，x が整数であることから，分数になることはない。よって，w は整数であるから，$\sqrt{x^2-12}$ は整数でなくてはならない。そのためには

$$x^2-12=k^2 \quad (k \text{ は非負の整数}) \quad ⑭$$

となる k が存在しなくてはならない。
このとき，$x \geqq \sqrt{12}$ である。⑭は

$$(x+k)(x-k)=12 \quad ⑮$$

と変形できる。
$x \geqq 4$ と⑮から
$(x+k,\ x-k)=(4,\ 3),\ (6,\ 2),\ (12,\ 1)$
を得る。よって，$x=4$
したがって，$x=y=z=4$ より，$w=4$ となり，求める四辺形は，一辺の長さが 4 の正方形のみであることがわかる。

§6. おわりに

上記の四辺形に関連して出てくる不定方程式も，数学Ａの範囲で解けるものばかりである。特に，④の不定方程式

$$xy=2(x+y)$$

は基本的な問題である。

§2 でも述べたことであるが，具体的な問題とからませることによって，より生徒達の興味を引く良問になるのではないかと考える。

次に，四辺形の問題に目を向けると，四辺形が円に内接するとき，さらに，2 辺が等しいときはどのような四辺形か，4 辺が互いに異なる場合はどのような形になるかなどの問題が考えられる。

辺に相等関係などの条件を付けなければ，不定方程式

$$\sqrt{xyzw}=x+y+z+w$$

の正の整数解を求める一般的な問題になる。

いずれも興味深い問題である。これらの問題については，今後の研究課題にしたいが，もし，挑戦していただけるなら幸甚である。

《参考文献》

〔1〕 MATHEMATICS and INFORMATICS quarterly，4/96，vol.6.
〔2〕 岩田至康，『幾何学大事典　Ⅰ』，槇書店
〔3〕 矢野健太郎監修，春日正文編，『モノグラフ 24 公式集 (4 訂版)』，科学新興社
〔4〕 坪井　俊ほか 13 名，『数学Ａ』，数研出版

(茨城大学，元茨城県立藤代高等学校)