# 生徒に問題を創らせる取り組み
## － 場合の数・確率の問題を創る －

伊藤（いとう）　亘央（のぶお）

## §1. はじめに

長年に亘り，数学の問題作成の経験を積み上げてきた。その経験から，問題を「創る」(「作る」ではない)ことは，難問を「解く」こと以上により多くの時間と高い思考力を要するものであることを認識する。

そこで，生徒にも問題を創らせる取り組みを実践したいと考えた。

## §2. 生徒に問題を創らせる取り組み

生徒に問題を創らせる取り組みとしてのテーマに,「場合の数」と「確率」を選んだ。解法としての計算式を見ることによって，実に様々な問題の想像が可能になるからである。まず，教員が解法としての計算式を生徒に示し，生徒がそれに適合するような元の問題を考えていくというものである。

例えば，ある確率の問題の解法としての計算式と解答がある。

(解法)　$\dfrac{4+4\times5}{6^2}$

(答え)　$\dfrac{2}{3}$

この解法の計算式を見て，元の問題がどのようなものであったか想像できるだろうか。たとえ解くことは簡単であったとしても，逆に元の問題を考えるというのはなかなか難しいものである。

この取り組みは4年前から始めた。授業中に問題を考えさせたり，定期試験に,「問題を創れ」という問題を出題することも時にはあるが，主には休業中の自由課題として実践している。もちろん休業中の課題としてこれとは別に，プリントや問題集からの指定などの必須課題もある。したがって，この自由課題は優先順位として，必須の課題を完了させた上での次なるものであるので，基本的には優秀生徒対象であるといえる。また，対象学年は主に高校1年だが，他の学年でも十分に楽しめるものと思われる。

この自由課題に関する手順は，以下の通りである。

① 休業前に教員が，ある問題集の解答ページの中から，場合の数や確率の問題の解法と思われる計算式をいくつか取り上げ，それぞれに適合するような問題を創ってみる。例えば数研出版のクリアー問題集は，後ろのページに計算式(略解)のみがあるので(詳細な解答冊子とは別に)，取り上げやすい。問題集によっては，詳細な解法の記載が計算式の周囲にあり，目に入ってしまうものもある。そのときは，誰かに計算式のみをピックアップしてもらう。

② その問題集の実際の問題を確認する。

③ 10種ほどの計算式と解答を記載した課題プリントを作成し，休業直前に生徒に配布する。ただし，その約10種の選び方としては，以下のバランスが適していると思われる。教員が①の段階で，短時間で考え出せたものを70％，数時間かかったものを20％，一日では考え出せなかったものや結局諦めたものを10％。

④ 休業中，生徒達は問題を考える。教員は，自分自身が①の段階で考えた問題と実際の問題を記載したプリントを作成する。

⑤ 休業後にレポート提出した生徒に④のプリントを配布し，提出した生徒のレポートを添削する。

⑥ 教員は，生徒が提出した問題の中から，計算式に適合していると判定できるものをすべて選び出し，それらの問題を記載したプリントを作成して，提出した生徒全員に配布する。また，格別おもしろい問題や優れた発想による問題などは，全生徒に見せる。

## §3. 実践の中からの具体例

解法としての計算式として，これまでに与えてき

た中から，ここでは８種を具体的に取りあげる。

(1)　${}_5P_2\times5!=2400$（通り）

(2)　${}_5C_2\times{}_7C_2=210$（通り）

(3)　$2+2^2+2^3+2^4=30$（通り）

(4)　${}_6C_3-{}_3C_3=19$（通り）

(5)　$1-\frac{1}{2^5}=\frac{31}{32}$（確率）

(6)　$\frac{4+4\times5}{6^2}=\frac{2}{3}$（確率）

(7)　$\frac{3+{}_4C_2\times3\times2}{3^4}=\frac{13}{27}$（確率）

(8)　${}_6C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}=\frac{320}{2184}$（確率）

以上の８種について，教員(伊藤)は①の段階で，次のように問題を創った。

(1)　男子５人，女子５人がいる。この中から，女子２人を選び，両端に女子，間に男子が並ぶ方法は何通りあるか。

(2)　平行な５本の直線があり，さらにそれらすべてに交わる７本の平行な直線がある。この合わせて12本の直線の中から，４本を使ってできる平行四辺形は何通りあるか。

(3)　１と２のみを使ってできる１万未満の自然数は全部でいくつあるか。

(4)　1，2，3，4，5，6の６個の数字の中から異なる数字を３個選ぶとき，それらの積が偶数になる選び方は何通りあるか。

(5)　１枚の硬貨を５回投げるとき，少なくとも１回は表が出る確率を求めよ。

(6)　サイコロを２回投げ，１回目の目の数を$m$，２回目の目の数を$n$とする。$m^n$の値が７以上になる確率を求めよ。

(7)　４人が１回ジャンケンをするとき，勝負がつかない確率を求めよ。

(8)　打率$\frac{2}{3}$の打者が，７回打席に立つとき，７打席目で，その試合４本目の安打を打つ確率を求めよ。ただし，その試合ではどの打席でも常に打率$\frac{2}{3}$であるとする。

以下は，問題集の実際の問題である。

(1)　a，b，c，d，e，f，gの７文字をすべて用いて作る順列の中で，両端が子音である順列は何通りか。

(2)　(伊藤作成問題とほぼ同じ)

(3)　２種類の記号○，×を１個以上４個以内の記号を使って並べる方法は何通りあるか。

(4)　1，2，3，4，5，6の６枚のカードの中から３枚を取り出すとき，その中に少なくとも１枚は奇数のカードが入っている場合は何通りあるか。

(5)　５枚の硬貨を同時に投げるとき，少なくとも１枚は裏が出る確率を求めよ。

(6)　大小２つのサイコロを同時に投げるとき，出た目の積が和より大きい確率を求めよ。

(7)　(伊藤作成問題とほぼ同じ)

(8)　白玉２個，黒玉１個が入った袋から玉を１個取り出し，色を確認してからもとに戻す試行を繰り返し，白玉が４回出た時点でこの試行を終了するとき，白玉が４回，黒玉が３回出て終了する確率を求めよ。

生徒が創った問題の中から，計算式に適合していると判定できるもので，教員が創った問題や問題集の実際の問題とは異なり，独創性の高いものや興味深いものの例をあげる。

(1)　１～５のカードとＡ～Ｅのカードがある。１～５のカードから２枚を選び，両端に数字，間にローマ字を１列に並べる方法は何通りか。

(2)　＜例１＞マンガ５冊と小説７冊がある。この中から２冊ずつ選ぶ方法は何通りか。

＜例２＞ある地図上に，Ａ地点とＢ地点を結ぶ道が５本，Ｂ地点とＣ地点を結ぶ道が７本ある。Ｂ→Ａ→Ｂ→Ｃ→Ｂの順に道を歩くイメージで，通る道すべてに線を描くと模様ができる。模様は何通り作れるか。ただし，１度通った道は２度通れない。また，一つの模様に対し，描く順序は関係ない。

(3)　＜例１＞16人でトーナメント式のジャンケン大会をした。試合出場者総数を求めよ。

＜例２＞ある新婚夫婦に，今後１人以上４人以下の子供が生まれるとする。性別と生まれる順番を込めて，将来何通りの家族構成の可能性があるか。ただし，双子や三つ子などはあり得ないものと

する。

⑷　男子３人，女子３人の中から３人の係を選ぶ。男子が必ず含まれる選び方は何通りあるか。

⑸　＜例１＞32 チームのトーナメント戦で，優勝できない確率を求めよ。ただし，すべての試合は互角とする。

＜例２＞３と７のみを使って５桁の整数を任意に作るとき，３３３３３にはならない確率を求めよ。

⑹　６つの面に，−1，1，3，5，7，9が記されたサイコロを２つ投げるとき，出た目の積が３以上になる確率を求めよ。

⑺　野球の試合前の練習で，コーチが３人の外野手の誰かに任意に４本の飛球を飛ばすとき，４回中１回も玉を飛ばされない外野手が１人だけにはならない確率を求めよ。

⑻　＜例１＞当たり２本，はずれ１本のくじがある。１度引いたら元に戻し，当たりが４回出るまで繰り返すとき，７回目で終わる確率を求めよ。

＜例２＞赤玉２個，白玉１個入った袋から，玉を１個取り出し，色を確認してから元に戻すという動作を７回繰り返すとき，７回目に赤が出て，それが４度目の赤である確率を求めよ。

次に，生徒が創った問題の中から，計算式に完全に適合しているとは判定できないが，興味深いものの例をあげる。

⑵　ある一人の男性が寿司を食べに行った。玉子５個，ウニ７個の中から，玉子２個，ウニ２個を選ぶ方法は何通りか。

→　玉子５個，ウニ７個各々に何かの区別が必要。

⑶　レーンが２つのボーリング場がある。初日に１回，二日目に２回，三日目に３回，四日目に４回そのボーリング場を利用する場合，レーンの選び方の順序は何通りあるか。

→　和の法則と積の法則の使い分けの点での間違い。計算式が $2\times2^2\times2^3\times2^4$ だったならば，または，四日間の中から一日のパターンだけ選ぶということならば適合する。

⑸　トランプを５回投げて，胡瓜を１回でも斬る確率を求めよ。

→　１回につき，胡瓜を斬る確率が常に $\frac{1}{2}$ であるという設定が必要。

⑹　サイコロを２回投げて，１回目の結果を $A$，２回目の結果を $B$ として，縦 $A$，横 $B$ の長方形を作る。対角線の長さが３より大きい確率を求めよ。

→　$A$，$B$ とも２以上で，$A=B=2$ のときを除外するという着眼は見事だが，$A=1$ で，$B$ が３以上の場合などを見落としている。

⑺　赤，白，黒の入った袋から１個の玉を取り出し，色を確認したら袋に戻すことを４回繰り返すとき，１回しか出ない色がない確率を求めよ。

→　２色が２回ずつ出る場合の数と，３色とも１回以上出る場合の数は異なる。

⑻　Ａさん，Ｂさんの２人がジャンケンを７回するとき，Ａさんが７回目で負け，それが４回目の負けである確率を求めよ。

→　最後の $\times\frac{2}{3}$ が $\times\frac{1}{3}$ だったならば，または，「負け」にせず，「負けない」，「勝たない」，「勝負がつく」などにすれば適合する。

## §4. 成果について

この取り組みの成果や，課題を与える頻度，提出状況などについては年度によって区々であるが，概して以下のようなことがいえる。

期待通り，優秀生徒は優れた問題を多く提出するが，意外にも，さして数学を得意科目とはしていない生徒が予想以上に多くの問題を創ってくる。しかも，見慣れた問題ではなく，独創性に富んだ問題を創ってくるのである。

この取り組みは，生徒の潜在能力を引き出す効果が大いにあると思われる。問題を創る能力は，問題を解く能力とは異なる部分が多い。

したがって，この取り組みそのものが，普通レベルの生徒を優秀生徒へと変化させる効力を持っている可能性がある。

### 《参考文献》

〔１〕　数研出版　クリアー数学Ａ

〔２〕　数研出版　4step 数学Ａ

（栃木県　那須高原海城中学校高等学校）