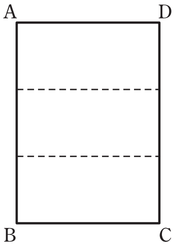
紙の n 等分について

ふじわら　ひろあき
藤原　啓明

§0. はじめに



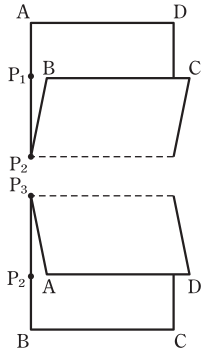
便箋など手紙を 3 つ折りにして，封筒に入れる場面は日常生活ではよくあることです。しかし，適当に折ると大きくずれてがっかりすることがあり，一方で定規で測るほどのことでもありません。紙を 3 等分する方法はいろいろありますが，一般的に知られているものは，紙を対角線に沿って折ったり，他の紙を必要としたりするので面倒な部分があります。ここでは，紙を 2 等分する作業だけを用いて紙を n 等分する方法を紹介します。近似であるため厳密に言うと完全な n 等分にはならないのですが，かなり実用的な方法であると自負しています。

§1. 紙の 3 等分について

ここから実際の手順を説明します。そのあと，手順が正しいことを証明します。実際に 3 つ折りをするときは，端だけ折り目をつけるようにすると，無駄な折り目が目立たなくなります。

手順①

辺 AB の中点を M とし，線分 AM 上に点 P_1 をとる。P_1 の位置は，$AP_1 : P_1B = 1 : 2$ に近いようにとるとよい。



手順②

線分 BP_1 の中点 P_2 をとる。

手順③

線分 AP_2 の中点 P_3 をとる。

手順④

線分 BP_3 の中点 P_4 をとる。

手順⑤

線分 AP_4 の中点 P_5 をとる。

以下繰り返すと，P_n は線分 AB を $1:2$ または $2:1$ に内分する点に近づく。

証明

$AB=1$ とする。線分 AB 上の点 P_n について，AP_n，P_nB のうち小さいものを a_n，$AP_1=a$ とすると，手順①②は，

$$a_1=a,\ a_2=\frac{1}{2}(1-a_1)$$

と表されるので，数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_1=a,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(1-a_n)$$

という漸化式で表される。

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n=\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

$$\left|-\frac{1}{2}\right|<1 \text{ より } \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$$

となるので上の手順を繰り返すと，P_n は線分 AB を $1:2$ または $2:1$ に内分する点に近づくことがわかる。

§2. 紙の 3 等分における誤差について

§1 で紹介した方法は近似を用いているので，その精度について調べます。

$a=\frac{2}{5}$ の場合について考えてみると，

$$a_n=\frac{1}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

これを初項から順に書き出してみると，

$$a_1=\frac{1}{15}+\frac{1}{3},\ a_2=-\frac{1}{30}+\frac{1}{3},\ a_3=\frac{1}{60}+\frac{1}{3}$$

$$a_4=-\frac{1}{120}+\frac{1}{3},\ a_5=\frac{1}{240}+\frac{1}{3},\ a_6=-\frac{1}{480}+\frac{1}{3}$$

例として A4 用紙の場合，縦の長さは 297 mm なので，手順⑥の段階での誤差は，

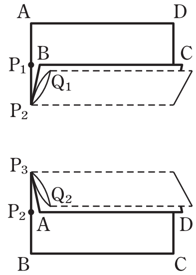
$$297\times\frac{1}{480}\fallingdotseq 0.62 \text{ mm}$$

この位の誤差になると，正確な３等分と大差はない。

§3. 紙の５等分について

手順①

辺 AB の中点を M とし，線分 AM 上に点 P_1 をとる。このとき P_1 の位置は，$\mathrm{AP}_1：\mathrm{P}_1\mathrm{B}=1：4$ に近いようにとるとよい。



手順②

線分 BP_1 の中点 Q_1 をとり，さらに線分 BQ_1 の中点 P_2 をとる。

手順③

線分 AP_2 の中点 Q_2 をとり，さらに線分 AQ_2 の中点 P_3 をとる。以下繰り返すと，P_n は線分 AB を１：４または４：１に内分する点に近づく。

証明

$\mathrm{AB}=1$ とする。線分 AB 上の点 P_n について，AP_n，$\mathrm{P}_n\mathrm{B}$ のうち，小さいものを a_n，$\mathrm{AP}_1=a$ とする。

手順①②は，

$$a_1=a,\ a_2=\frac{1}{4}(1-a_1)$$

と表されるので，数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_1=a,\ a_{n+1}=\frac{1}{4}(1-a_n)$$

という漸化式で表される。

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n=\left(a-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}$$

$$\left|-\frac{1}{4}\right|<1 \text{ より } \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{5}$$

となるので，上の手順を繰り返すと，P_n は線分 AB を１：４または４：１に内分する点に近づくことがわかる。

§4. 一般化

ここまで紙の３等分，５等分の方法を紹介しました。ここからは任意の２以上の自然数 n について，紙の n 等分ができることを説明します。n が２の累乗で表される場合は，２等分を繰り返せばよいので，n が２の累乗で表されない場合を考えます。

手順①

２以上の自然数 n は，自然数 m と０以上の整数 α を用いて，$n=2^m+\alpha$ と表される。

このとき m は，$2^m \leqq n < 2^{m+1}$ を満たすように定める。

手順②

辺 AB の中点を M とし，線分 AM 上に点 P_1 をとる。

手順③

線分 BP_1 を 2^m 等分し，点 B から α 番目の点 P_2 をとる。

手順④

線分 AP_2 を 2^m 等分し，点 A から α 番目の点 P_3 をとる。以下繰り返すと，P_n は線分 AB を $\alpha：2^m$ または $2^m：\alpha$ に内分する点に近づく。

証明

$\mathrm{AB}=1$ とする。線分 AB 上の点 P_n について，AP_n，$\mathrm{P}_n\mathrm{B}$ のうち，小さいものを a_n，$\mathrm{AP}_1=a$ とする。

手順②③は，

$$a_1=a,\ a_2=\frac{1-a_1}{2^m}\alpha$$

と表されるので，数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_1=a,\ a_{n+1}=\frac{\alpha}{2^m}(1-a_n)$$

という漸化式で表される。

$$a_{n+1}-\frac{\alpha}{2^m+\alpha}=-\frac{\alpha}{2^m}\left(a_n-\frac{\alpha}{2^m+\alpha}\right)$$

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n=\left(a-\frac{\alpha}{2^m+\alpha}\right)\left(-\frac{\alpha}{2^m}\right)^{n-1}+\frac{\alpha}{2^m+\alpha}$$

$$\left|-\frac{\alpha}{2^m}\right|<1 \text{ より } \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\alpha}{2^m+\alpha}$$

よって，P_n は辺 AB を $\alpha：2^m$ または $2^m：\alpha$ に内分する点に近づく。辺 AB を点 P_n で２つに分けたとき，長い方を 2^m 等分すれば，辺 AB を n 等分したときの１行分の長さとなる。これを利用すれば，n 等分できる。

§5. おわりに

§4で２以上の自然数 n について紙の n 等分ができることがわかりました。ただ，実際に使えるのは３等分ぐらいだと思いますが…。一度お試し下さい。

（大阪府立芥川高等学校）