オイラーの定数 γ について
－ いろいろな表現の仕方 －

西元(にしもと)　教善(のりよし)

§1. はじめに

オイラーの定数 γ とは，次の極限値のことである。

[1]　$\boldsymbol{\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)}$

その値は 0.57721 56649… である。γ は π や e とともに重要な数学定数に挙げられているが，未だに有理数，無理数のどちらかさえわかっていない。対数の性質から

$$\log n=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

であるから，

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}+\frac{1}{n}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

よって，

[2]　$\boldsymbol{\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}}$

という表現もできる。

本稿では，γ についてどのような表現ができるか考察してみる。

§2. 対数関数の展開式による表現

§1 で $\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ が出たので，$\log(1+x)$ のテーラー展開を考えると，$|x|<1$ においては

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\cdots \qquad \cdots\cdots①$$

であるから，$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{kn^k}$

よって，$\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{kn^k}\right\}$

ここで，$\frac{1}{n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k$ であるから，

[3]　$\boldsymbol{\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)^k}+\frac{(-1)^k}{kn^k}\right\}\right]}$

と表現できる。

§3. ゼータ関数による表現

拙稿「数表を楽しむ－ゼータ関数表を題材にして－」で証明したように，ゼータ関数 $\zeta(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$ を使えば，

[4]　$\boldsymbol{\gamma=\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\{\zeta(n)-1\}}$

と表せる。

§4. 取り尽くしによる表現

a　γ の定義式 [1] の修正

γ の定義式 [1] の右辺を次のように修正してみる。

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right\}$$

すると，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n+\log n-\log(n+1)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)+\log\frac{n}{n+1}\right\}$$

ここで，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\to\gamma,$$

$$\log\frac{n}{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$$

であるから，[5] のようになる。

[5]　$\boldsymbol{\gamma=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right\}}$

このように修正を加えた理由は，図形的に考察しやすくするためである。[1] の式では，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}+\frac{1}{n}$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{k}-\{\log(k+1)-\log k\}\right]+\frac{1}{n}$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\right)+\frac{1}{n}$$

であるから，k，n を自然数とするとき，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と 2 直線 $x=k+1$，$y=\dfrac{1}{k}$ で囲まれた図形 F_k の面積 S_k の $k=1$ から $k=n-1$ までの和と縦 $\dfrac{1}{n}$，横 1 の長方形の面積 $\dfrac{1}{n}$ の和となる。

そこで，[5] のようにしておけば，図 2 のように面積 S_k の $k=1$ から $k=n$ までの和となる。

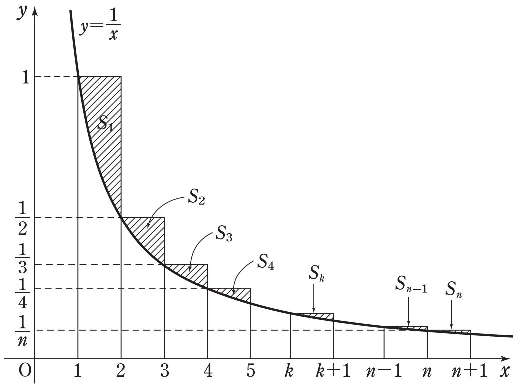

図 1

こうすることによって，オイラーの定数 γ は，図 1 に示す斜線部分の面積の無限和になる。

b　取り尽くし法で面積として求める

図 2 の図形 F_k において，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点で，x 座標が x である点を P_x とする。また，$A_k\left(k+1,\ \dfrac{1}{k}\right)$ とする。

$\triangle P_kA_kP_{k+1}$ の面積を $s_{k,1}$，$\triangle P_kP_{\frac{2k+1}{2}}P_{k+1}$ の面積を $s_{k,2}$，$\triangle P_kP_{\frac{4k+1}{4}}P_{\frac{2k+1}{2}}$ と $\triangle P_{\frac{2k+1}{2}}P_{\frac{4k+3}{4}}P_{k+1}$ の面積の和を $s_{k,3}$ とする。

以下，同様にして，図形 F_k において i 回目の取り分の面積を $s_{k,i}$ とする。

ここまでは，図形 F_k について考えたが，次にそれらをすべて寄せ集めた図形 $F=F_1\cup F_2\cup F_3\cup\cdots\cup F_k\cup\cdots$ を考え，図形 F における i 回目までの取り分の和を S_i とする。

つまり，$S_i=\sum_{k=1}^{\infty}s_{k,i}$ である。

図形 F の面積 S は，$S=\sum_{i=1}^{\infty}S_i$ であるから，

$S=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}s_{k,i}$ である。これが γ に一致するので，

$\gamma=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}s_{k,i}$ である。

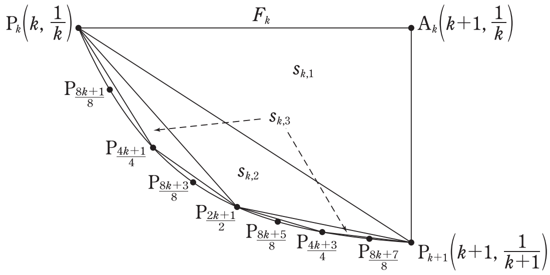

図 2

c　$s_{k,i}$ を求める

ア　$s_{k,1}$

$P_kA_k=1$，$A_kP_{k+1}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ より，

$s_{k,1}=\dfrac{1}{2}P_kA_k\cdot P_kP_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$ である。

イ　$s_{k,2}$

直線 P_kP_{k+1} の方程式を $y=ax+b$ とおくと，$P_k\left(k,\ \dfrac{1}{k}\right)$，$P_{k+1}\left(k+1,\ \dfrac{1}{k+1}\right)$ を通ることから，

$\dfrac{1}{k}=ka+b$，$\dfrac{1}{k+1}=(k+1)a+b$

これを解いて，$a=-\dfrac{1}{k(k+1)}$，$b=\dfrac{2k+1}{k(k+1)}$

よって，直線 P_kP_{k+1} の方程式は

$$y=-\frac{x}{k(k+1)}+\frac{2k+1}{k(k+1)}$$

これに，$x=\dfrac{2k+1}{2}$ を代入して，$y=\dfrac{2k+1}{2k(k+1)}$

すると，線分 P_kP_{k+1} の中点を $Q_{\frac{2k+1}{2}}$ とすれば

$Q_{\frac{2k+1}{2}}\left(\dfrac{2k+1}{2},\ \dfrac{2k+1}{2k(k+1)}\right)$ であるから，

$$P_{\frac{2k+1}{2}}Q_{\frac{2k+1}{2}}=\frac{2k+1}{2k(k+1)}-\frac{2}{2k+1}$$
$$=\frac{(2k+1)^2-4k(k+1)}{2k(k+1)(2k+1)}$$
$$=\frac{1}{2k(k+1)(2k+1)}$$
$$=\frac{2}{2k(2k+2)(2k+1)}$$
$$=\frac{1}{2k(2k+1)}-\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$=\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}-\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

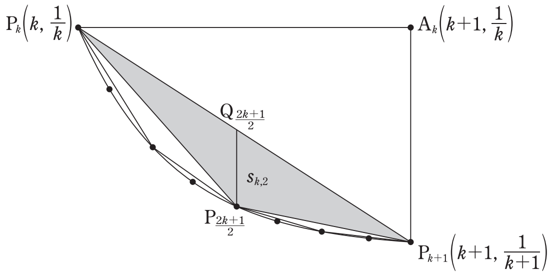

図 3

図 3 において，$s_{k,2}$ は斜線で示される三角形の面積であるから

$$s_{k,2}=\frac{1}{2}P_{\frac{2k+1}{2}}Q_{\frac{2k+1}{2}}\cdot P_kP_{k+1}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\right)$$

である。

ウ　$s_{n,3}$

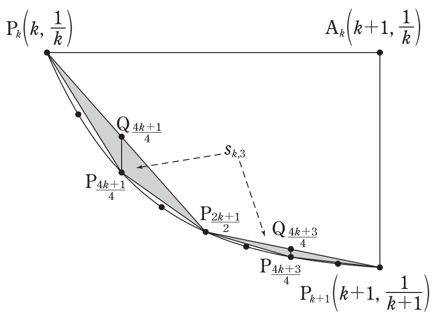

図 4

同様に，直線 $P_kP_{\frac{2k+1}{4}}$ と $P_{\frac{2k+1}{4}}P_{k+1}$ の方程式を求め，線分 $P_kP_{\frac{2k+1}{4}}$ と $P_{\frac{2k+1}{4}}P_{k+1}$ の中点 $Q_{\frac{4k+1}{4}}$ と $Q_{\frac{4k+3}{4}}$ の y 座標を求める。(図 4 参照)

次に，線分 $P_{\frac{4k+1}{4}}Q_{\frac{4k+1}{4}}$ と $P_{\frac{4k+3}{4}}Q_{\frac{4k+3}{4}}$ の長さを求めると，$\triangle P_kP_{\frac{4k+1}{4}}P_{\frac{2k+1}{2}}$ と $\triangle P_{\frac{2k+1}{2}}P_{\frac{4k+3}{4}}P_{k+1}$ の面積の和 $s_{k,3}$ は，

$$s_{k,3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P_{\frac{4k+1}{4}}Q_{\frac{4k+1}{4}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P_{\frac{4k+3}{4}}Q_{\frac{4k+3}{4}}$$
$$=\frac{1}{4}\left(P_{\frac{4k+1}{4}}Q_{\frac{4k+1}{4}}+P_{\frac{4k+3}{4}}Q_{\frac{4k+3}{4}}\right)$$

で求められる。

直線 $P_kP_{\frac{2k+1}{2}}$ の方程式は，

$$y=-\frac{2x}{k(2k+1)}+\frac{4k+1}{k(2k+1)} \qquad \cdots\cdots①$$

直線 $P_{\frac{2k+1}{2}}P_{k+1}$ の方程式は，

$$y=-\frac{2x}{(k+1)(2k+1)}+\frac{4k+3}{(k+1)(2k+1)} \qquad \cdots\cdots②$$

$x=\frac{4k+1}{4}$ を①に代入して，$y=\frac{4k+1}{2k(2k+1)}$

$x=\frac{4k+3}{4}$ を②に代入して，$y=\frac{4k+3}{2(k+1)(2k+1)}$

よって，

$$P_{\frac{4k+1}{4}}Q_{\frac{4k+1}{4}}=\frac{4k+1}{2k(2k+1)}-\frac{4}{4k+1}$$
$$=\frac{1}{2k(2k+1)(4k+1)}$$
$$=\frac{4}{4k(4k+1)(4k+2)}$$
$$=2\left\{\frac{1}{4k(4k+1)}-\frac{1}{(4k+1)(4k+2)}\right\}$$
$$=2\left\{\frac{1}{4k}-\frac{1}{4k+1}-\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{4}{4k+2}\right)\right\}$$
$$=2\left(\frac{1}{4k}-\frac{2}{4k+1}+\frac{1}{4k+2}\right)$$

同様にして，

$$P_{\frac{4k+3}{4}}Q_{\frac{4k+3}{4}}=2\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{2}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right)$$

よって，

$$s_{k,3}=\frac{1}{4}(P_{\frac{4k+1}{4}}Q_{\frac{4k+1}{4}}+P_{\frac{4k+3}{4}}Q_{\frac{4k+3}{4}})$$
$$=\frac{1}{4}\left\{2\left(\frac{1}{4k}-\frac{2}{4k+1}+\frac{1}{4k+2}\right)\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{1}{4k+2}-\frac{2}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4k}-\frac{2}{4k+1}+\frac{2}{4k+2}-\frac{2}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right)$$

エ　$s_{k,4}$

同じ方針で計算すればよい。結果のみ示すと，

$$s_{k,4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8k}-\frac{2}{8k+1}+\frac{1}{8k+2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8k+2}-\frac{2}{8k+3}+\frac{1}{8k+4}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8k+4}-\frac{2}{8k+5}+\frac{1}{8k+6}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8k+6}-\frac{2}{8k+7}+\frac{1}{8k+8}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8k}-\frac{2}{8k+1}+\frac{2}{8k+2}-\frac{2}{8k+3}+\frac{2}{8k+4}\right.$$
$$\left.-\frac{2}{8k+5}+\frac{2}{8k+6}-\frac{2}{8k+7}+\frac{1}{8k+8}\right)$$

d　S_i を求める

ア　S_1

$s_{k,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ より，

$$S_1=\sum_{k=1}^{\infty}s_{k,1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

イ　S_2

$s_{k,2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\right)$ より，

$$S_2=\sum_{k=1}^{\infty}s_{k,2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k+2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)+\frac{1}{4}$$
$$=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}-\left\{-1+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ より，

$$S_2=\sum_{k=1}^{\infty}s_{k,2}=\underline{\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-\log 2}=\frac{3}{4}-\log 2$$

である。

ウ　S_3

$s_{k,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4k}-\frac{2}{4k+1}+\frac{2}{4k+2}-\frac{2}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right)$

より，

$$S_3=\sum_{k=1}^{\infty}s_{k,3}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k}-\frac{2}{4k+1}+\frac{2}{4k+2}-\frac{2}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k}-\frac{2}{4k+1}+\frac{2}{4k+2}-\frac{2}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{4k+1}+\frac{2}{4k+2}-\frac{2}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4n+4}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)+\frac{1}{8}$$
$$=\sum_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{8}=-\sum_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{1}{8}$$
$$=-\left\{-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}+\frac{1}{8}$$
$$=\frac{1}{8}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$
$$=\underline{\frac{1}{8}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\log 2}=\frac{17}{24}-\log 2$$

エ　S_4

$$s_{k,4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8k}-\frac{2}{8k+1}+\frac{2}{8k+2}-\frac{2}{8k+3}+\frac{2}{8k+4}-\frac{2}{8k+5}+\frac{2}{8k+6}-\frac{2}{8k+7}+\frac{1}{8k+8}\right)$$

より，これまでと同様な計算から

$$S_4=\sum_{n=1}^{\infty}s_{n,4}$$
$$=\frac{1}{16}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$
$$=\underline{\frac{1}{16}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\log 2}$$
$$=\frac{1171}{1680}-\log 2$$

e　$\gamma=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^n+k}$ について

d から，$i\geqq 2$ のとき，

$$S_i=\sum_{k=1}^{\infty}s_{i,k}=\underline{\frac{1}{2^i}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2^{i-1}}-\log 2}$$

よって，$\underline{S_i=\frac{1}{2^i}+\sum_{k=1}^{2^{i-1}}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\log 2}$

と表せる。また，

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

より

$$\underline{S_i=\frac{1}{2^i}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{i-1}+k}}$$

という形にも表せる。

$S_1=\frac{1}{2}$，$i\geqq 2$ のとき，$S_i=\frac{1}{2^i}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{i-1}+k}$

であり，また，$\gamma=S=\sum_{i=1}^{\infty}S_i$ であるから，

$$\gamma=\frac{1}{2}+\sum_{i=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{2^i}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{i-1}+k}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{2^i}-\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{i-1}+k}$$
$$=1+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^i+k}$$

i を n に置き換えれば，

[6]　$\boldsymbol{\gamma=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^n+k}}$

f　$\boldsymbol{\gamma=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)2k}-\log 2\right\}}$ **について**

dから，$i\geqq 2$ のとき，

$S_i=\frac{1}{2^i}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2^{i-1}}-\log 2$ である。

$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{(2k-1)2k}$ より

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2^{i-1}}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{i-1}-1}-\frac{1}{2^{i-1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2^{i-2}}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{2^{i-2}}\frac{1}{(2k-1)2k}$$

よって，$S_i=\frac{1}{2^i}+\sum_{k=1}^{2^{i-2}}\frac{1}{(2k-1)2k}-\log 2$

したがって，

$$\sum_{i=1}^{\infty}S_i=\frac{1}{2}+\sum_{i=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{2^i}+\sum_{k=1}^{2^{i-2}}\frac{1}{(2k-1)2k}-\log 2\right\}$$

$$=1+\sum_{i=2}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{2^{i-2}}\frac{1}{(2k-1)2k}-\log 2\right\}$$

i を n に置き換えれば，$\gamma=\sum_{i=1}^{\infty}S_i$ より

$$\gamma=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{2^{n-2}}\frac{1}{(2k-1)2k}-\log 2\right\}$$

[7]　$\boldsymbol{=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)2k}-\log 2\right\}}$

§5. まとめ

本稿では，オイラーの定数 γ の定義式 $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$ をいろいろと言い換えてみた。γ は π，e，i とともに数学の重要定数といわれているが，たとえば自然対数の底 $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}$ は収束も速く，無理数であることも簡単に証明できる。

一方，γ は

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^n+k}$$

のように，e よりは若干複雑な極限値，無限級数の和である。

この定数に魅力を感じる人も多いだろう。その値が有理数か無理数かは，フェルマーの定理のように数学マニアにも馴染める問題であるからである。

恐らくその値は無理数であろうが，その証明はプロにとっても困難なようである。

ワイルズが最先端の現代代数学を駆使して解決したように，新たな数学的概念やツールが揃わないと解決しないのだろうか。また，仮にそれが無理数であれば，それがどんな新たな問題を解決するのであろうか，それとも単に先のない未解決問題にすぎないのだろうか…

最後に，本稿で扱った γ を表す（言い換え）の式をまとめて終わりとする。

[1]　$\boldsymbol{\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)}$

[2]　$\boldsymbol{\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}}$

[3]　$\boldsymbol{\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)^k}+\frac{(-1)^k}{kn^k}\right\}\right]}$

[4]　$\boldsymbol{\gamma=\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\{\zeta(n)-1\}}$

[5]　$\boldsymbol{\gamma=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right\}}$

[6]　$\boldsymbol{\gamma=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^n+k}}$

[7]　$\boldsymbol{\gamma=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)2k}-\log 2\right\}}$

（山口県立岩国高等学校）