整関数曲線と正弦曲線の平均曲率の比較

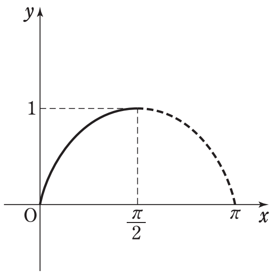
伊藤（いとう）　亘央（のぶお）

§1. はじめに

＜問題＞

> 2 曲線 $\begin{cases} y=-\dfrac{4}{\pi^2}x^2+\dfrac{4}{\pi}x & \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y=\sin x & \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$
>
> で囲まれた部分の面積を求めよ。

定積分で求めればよいので一見単純な問題に見えるかもしれないが，2 曲線とも概形は全く同様で図のようになる。



この 2 曲線の曲率の微妙な違いや，関数としての大小関係についての興味が切っ掛けでこの問題を発想した。そして，この問題の解法のポイントでありかつ難しさは，やはりこの 2 つの関数の大小関係を調べるところにある。

§2. 整関数と三角関数の大小関係の定理

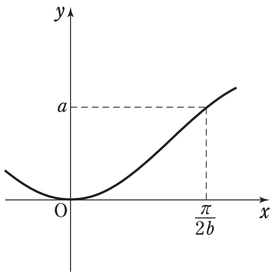
先の問題の本質は，2 次関数と三角関数の比較であり，単純な正弦曲線 $y=\sin x$ に合わせて，放物線を頂点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$，原点通過として設定している。これを一般化させ，整関数と三角関数の比較として考えたい。

整関数曲線の方を，$y=Ax^n (A>0)$ の形に単純化させ，正弦曲線を原点Oを極小点とするものとし，$x>0$ で原点に最も近い変曲点を，曲線 $y=Ax^n$ が共有するものとして設定することによって，整関数曲線と正弦曲線の平均曲率の比較をしたい。

振幅 a，周期 $\dfrac{2\pi}{b}$ $(a>0,\ b>0)$ で，原点を極小点とする正弦曲線の方程式は，

$$y=-a\cos bx+a$$

の形になる。この曲線上の $x>0$ で原点に最も近い変曲点は，点 $\left(\dfrac{\pi}{2b},\ a\right)$ である。

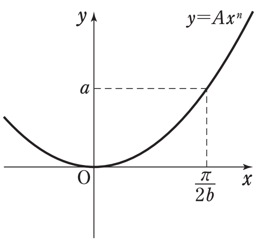


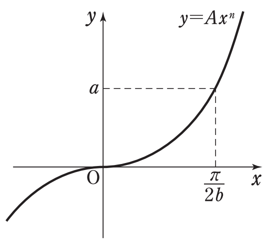
一方，曲線 $y=Ax^n$ が点 $\left(\dfrac{\pi}{2b},\ a\right)$ を通るとき，

$$a=A\times\left(\frac{\pi}{2b}\right)^n \text{ より } A=\frac{2^n ab^n}{\pi^n}$$

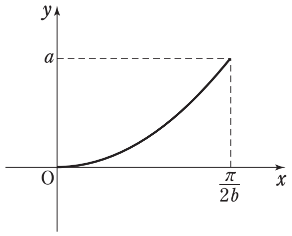
と設定すればよい。

＜n が偶数のとき＞　　＜n が奇数のとき＞





以上の設定により，2 曲線 $y=Ax^n$，$y=-a\cos bx+a$ とも，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2b}$ での概形は全く同様で図のようになる。



この２つの関数の大小関係について，次の定理が得られる。

> **＜定理＞**
>
> nを２以上の自然数とすると，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2b}$ で常に $\dfrac{2^n ab^n}{\pi^n}x^n \leqq -a\cos bx + a$ が成立する。

§3. 定理の証明

定理を数学的帰納法で証明する。

＜証明＞

(Ⅰ)　$n=2$ のときの成立を証明する。

$f_2(x)=\dfrac{4ab^2}{\pi^2}x^2$，$g(x)=-a\cos bx+a$，

$F_2(x)=f_2(x)-g(x)$ とおく。

$$F_2(x)=\frac{4ab^2}{\pi^2}x^2+a\cos bx-a$$

$$F_2{}'(x)=\frac{8ab^2}{\pi^2}x-ab\sin bx$$

$$=ab\left(\frac{8b}{\pi^2}x-\sin bx\right)$$

$$F_2{}''(x)=ab\left(\frac{8b}{\pi^2}-b\cos bx\right)$$

$$=ab^2\left(\frac{8}{\pi^2}-\cos bx\right)$$

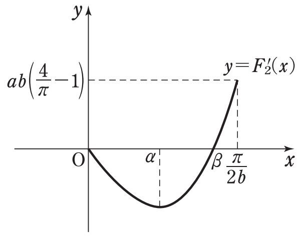
ここで，$\cos b\alpha=\dfrac{8}{\pi^2}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2b}$ なるαをとる。

$F_2{}''(\alpha)=0$

x	0	…	α	…	$\frac{\pi}{2b}$
$F_2{}''(x)$		−	0	＋	
$F_2{}'(x)$	0	↘		↗	$ab\left(\frac{4}{\pi}-1\right)$

明らかに $F_2{}'\left(\dfrac{\pi}{2b}\right)=ab\left(\dfrac{4}{\pi}-1\right)>0$

さらに，$F_2{}'(\beta)=0$，$\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2b}$ なるβをとる。



x	0	…	β	…	$\frac{\pi}{2b}$
$F_2{}'(x)$		−	0	＋	
$F_2(x)$	0	↘		↗	0

増減表より，

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2b}$ で常に $F_2(x) \leqq 0$

つまり $\dfrac{4ab^2}{\pi^2}x^2 \leqq -a\cos bx+a$

したがって $n=2$ のとき成立する。

(Ⅱ)　$n=k$ のときの成立つまり，

$$F_k(x)=\frac{2^k ab^k}{\pi^k}x^k+a\cos bx-a$$

とおき，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2b}$ で常に $F_k(x) \leqq 0$ であると仮定して，$n=k+1$ のときの成立を証明する。

$$F_{k+1}(x)=\frac{2^{k+1}ab^{k+1}}{\pi^{k+1}}x^{k+1}+a\cos bx-a$$

とおくと，

$$F_{k+1}(x)=\frac{2b}{\pi}x\cdot F_k(x)+a\left(\frac{2b}{\pi}x-1\right)(1-\cos bx)$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2b}$ で，$\dfrac{2b}{\pi}x \geqq 0$，$F_k(x) \leqq 0$

$\dfrac{2b}{\pi}x-1 \leqq 0$，$1-\cos bx \geqq 0$ より，

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2b}$ で常に $F_{k+1}(x) \leqq 0$

つまり $\dfrac{2^{k+1}ab^{k+1}}{\pi^{k+1}}x^{k+1} \leqq -a\cos bx+a$

したがって，$n=k+1$ のときも成立する。

以上(Ⅰ)，(Ⅱ)の証明より，２以上のすべての自然数nについて，

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2b}$ で常に $\dfrac{2^n ab^n}{\pi^n}x^n \leqq -a\cos bx+a$

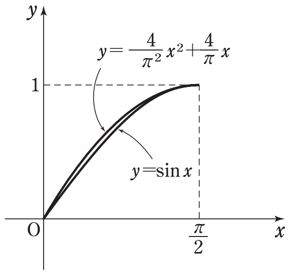
が成立する。　　　　　　　　　　（証明終わり）

§4. 整関数曲線と正弦曲線の平均曲率の比較

実は，冒頭にあげた問題については，定理の証明の(I)と本質的に同じ方法により，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で常に $-\dfrac{4}{\pi^2}x^2+\dfrac{4}{\pi}x\geqq\sin x$ であることが分かる。2 曲線 $y=-\dfrac{4}{\pi^2}x^2+\dfrac{4}{\pi}x$，$y=\sin x$ は結果的に図のような関係になり，求める面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{4}{\pi}x\right)-\sin x\right\}dx=\frac{\pi}{3}-1$$

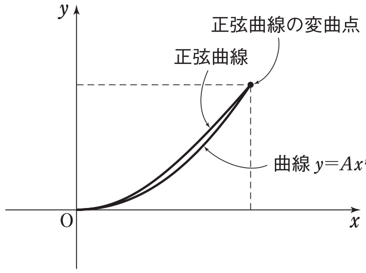
である。



定理は，整関数と三角関数の大小関係について述べたものであるが，グラフの曲線の視点からみると，冒頭の問題も含めて，その範囲での平均曲率は，整関数曲線の方が正弦曲線よりも大きいということが言える。

詳しく述べると次のような結論になる。

原点Oを極小点とする正弦曲線の，$x>0$ で原点に最も近い変曲点をPとする。O，Pを共有する曲線 $y=Ax^n(A>0)$ と，この正弦曲線とのOからPまでの平均曲率を比べると，曲線 $y=Ax^n$ の平均曲率の方が必ず大きい。



《参考文献》

〔1〕 伊藤亘央『独創問題集』
那須高原海城 数学科 研究集録 第1集

（栃木県　那須高原海城中学校高等学校）