どうして $\log_{10}2=0.3010$ なのか？

加藤(かとう)　一(はじめ)

§1. $\log_{10}x$ を求めるアルゴリズム

文献〔1〕(インターネットでダウンロード可)に，対数を求める17行のプログラムが載っていますが，とても簡単なアルゴリズムなので，ここで紹介したいと思います。(元のプログラムは $\log_2 x$ です)。そのアルゴリズムというのは，

$$\log_{10}x=\frac{1}{2}\log_{10}x^2$$

$$x^2\geqq 10 \text{ ならば } \log_{10}x^2=1+\log_{10}\frac{x^2}{10}$$

これを繰り返すということです。

$x=2$ として計算してみます。8桁の電卓を使うものとして，9桁目以降は切り捨てました。

$\log_{10}2$

$=\frac{1}{2}\log_{10}2^2$

$=\frac{1}{2}\log_{10}4$

$=\frac{1}{2^2}\log_{10}4^2$

$=\frac{1}{2^2}\log_{10}16$

$=\frac{1}{2^2}\log_{10}(10\times 1.6)$

$=\frac{1}{2^2}(1+\log_{10}1.6)$

$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\log_{10}1.6$

$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\log_{10}1.6^2$

$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\log_{10}2.56$

$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}\log_{10}6.5536$

$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}\log_{10}42.949672$

$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^5}\log_{10}4.2949672$

……

$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{18}}+\cdots$

$=0.25+0.03125+0.015625+0.0039062$
$\quad +0.0002441+0.0000038+\cdots$

$=0.3010291+\cdots$

最後の…の部分は $\frac{1}{2^{18}}$ よりも小さい値なので，

$$0.3010291<\log_{10}2<0.3010329$$

小数第5位を四捨五入して，

$$\log_{10}2\fallingdotseq 0.3010$$

と，あっけなく2の対数が4桁まで求められました。計算機を使わなくても，紙と鉛筆と時間があれば，必要な桁数を好きなだけ求めることができます。

§2. おわりに

以前勤めていた五日市高校では，大学理系の進学者がほとんどいなかったので，教科書を少し離れた内容ですが，3年生の選択科目「数学Ⅱ」で，簡単な対数計算を扱っていました。計算機がここまで普及して，その意味は失われているという意見もありますが，対数計算は面白い教材です。生徒から表題のような質問が出たりもします。関数電卓を使えば，$\log_{10}2$ も $10^{0.3010}$ も答一発!ですが，計算機の基本は0と1の論理演算で，組込み関数は人間の書いたプログラムです。どうして？という疑問を生徒に抱かせる，あるいはこちらから問いかけることは，今後も変わらず重要だと思います。

《参考文献》

〔1〕 Niklaus Wirth, PROGRAMMING IN OBERON p.14
(http://www.inf.ethz.ch/personal/wirth/books/ProgInOberon.pdf)

(東京都立深川高等学校)