4次関数のグラフの接線と変曲点に関する性質について

宮原（みやはら）　敏明（としあき）

§1. はじめに

入試問題を一般化したら，面白い結果が得られる場合がある。例えば，次の問題である。

「多項式 $f(x)$ で定義される曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=g(x)$ に点 $(s,\ t)$ で接するとは $f(x)-g(x)$ が $(x-s)^2$ で割り切れることであり，このとき $y=g(x)$ は $y=f(x)$ の $(s,\ t)$ における接線である。曲線 $f(x)=x^2(x^2-2x-3)$ が直線 $g(x)=px+q$ と異なる2点P，Qで接している。このとき p，q の値を求めよ。〔06　慶応大〕」

与えられた曲線 $f(x)$ を一般の4次式にして，その性質を調べてみた。

§2. 2点で接する接線

4次関数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$ のグラフに2点で接する接線を $y=px+q$ とおき，2接点の x 座標を α，β とすると，

$$(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)-(px+q)$$
$$=a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

が成り立つ。

$$ax^4+bx^3+cx^2+(d-p)x+(e-q)$$
$$=a\{x^4-2(\alpha+\beta)x+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x$$
$$-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2\}$$

係数を比較すると，

$$b=-2a(\alpha+\beta) \qquad \cdots\cdots ①$$
$$c=a(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2) \qquad \cdots\cdots ②$$
$$d-p=-2\alpha\beta(\alpha+\beta)a \qquad \cdots\cdots ③$$
$$e-q=a\alpha^2\beta^2 \qquad \cdots\cdots ④$$

である。

①から　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{2a}$

②から　$\dfrac{c}{a}=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta$

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\left\{\frac{c}{a}-\left(-\frac{b}{2a}\right)^2\right\}=-\frac{b^2-4ac}{8a^2}$$

を得る。

よって，α，β を解にもつ2次方程式は，

$$t^2+\frac{b}{2a}t-\frac{b^2-4ac}{8a^2}=0$$

であるから，

$$8a^2t^2+4abt-b^2+4ac=0$$
$$t=\frac{-ab\pm\sqrt{a^2(3b^2-8ac)}}{4a^2}$$
$$=\frac{-ab\pm|a|\sqrt{3b^2-8ac}}{4a^2}$$

a の符号を考慮して，$t=\dfrac{-b\pm\sqrt{3b^2-8ac}}{4a}$

これから，$3b^2-8ac>0$ のとき，接点は2個ある。

③，④から $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を消去して，

p，q を a，b，c，d，e で表す。

$$p=2\alpha\beta(\alpha+\beta)a+d$$
$$=2\left(-\frac{b^2-4ac}{8a^2}\right)\left(-\frac{b}{2a}\right)a+d=\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d$$
$$q=-a\alpha^2\beta^2+e$$
$$=-a\left(-\frac{b^2-4ac}{8a^2}\right)^2+e=-\frac{(b^2-4ac)^2}{64a^3}+e$$

となる。

よって，次の性質が成り立つ。

> **【定理1】**
> 4次関数 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$ について，$3b^2-8ac>0$ が成り立つならば，異なる2点で接する接線が存在し，その方程式は，
> $$y=\left\{\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d\right\}x-\frac{(b^2-4ac)^2}{64a^3}+e$$
> である。

また接線の方程式の右辺を $g(x)$ とおくと，接点の座標は $(\alpha,\ g(\alpha))$，$(\beta,\ g(\beta))$ である。$g(\alpha)$ の値は，計算することは出来るが，ただ複雑なだけで面白くはない。

§3. 2個の変曲点における接線

4次関数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ について，

$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d \text{ より，}$$

$$f''(x)=12ax^2+6bx+2c$$
$$=2(6ax^2+3bx+c)$$

これから，$f''(x)=0$ とおくと，

$$x=\frac{-3b\pm\sqrt{3(3b^2-8ac)}}{12a} \quad (a\neq 0)$$

よって，$3b^2-8ac>0$ のとき，$f''(x)$ は2カ所で符号を変えるから，変曲点は2個ある。

$$\gamma=\frac{-3b+\sqrt{3(3b^2-8ac)}}{12a},$$

$$\delta=\frac{-3b-\sqrt{3(3b^2-8ac)}}{12a}$$

とおくと，変曲点における接線の方程式は，

$$y=f'(\gamma)(x-\gamma)+f(\gamma)$$
$$=f'(\gamma)x-\gamma f'(\gamma)+f(\gamma)$$

γ のような値を $f'(x)$ に代入するときは，直接当てはめては駄目だと生徒に言っているので，$f'(\gamma)=4a\gamma^3+3b\gamma^2+2c\gamma+d$ を $6a\gamma^2+3b\gamma+c\ (=0)$ で割ることにする。

$$f'(\gamma)=(6a\gamma^2+3b\gamma+c)\times\left(\frac{2}{3}\gamma+\frac{b}{6a}\right)+\frac{8ac-3b^2}{6a}\gamma+\frac{6ad-bc}{6a}$$

$$=\frac{8ac-3b^2}{6a}\gamma+\frac{6ad-bc}{6a}$$

よって $y=f'(\gamma)x-\gamma f'(\gamma)+f(\gamma)$

$$=\left(\frac{8ac-3b^2}{6a}\gamma+\frac{6ad-bc}{6a}\right)x-\gamma\left(\frac{8ac-3b^2}{6a}\gamma+\frac{6ad-bc}{6a}\right)+\frac{24a^2d-12abc+3b^3}{24a^2}\gamma+e-\frac{10ac^2-3b^2c}{72a^2}$$

$$=\left(-\frac{3b^2-8ac}{6a}\gamma+\frac{6ad-bc}{6a}\right)x+\frac{3b^2-8ac}{6a}\gamma^2+\frac{b(3b^2-8ac)}{24a^2}\gamma-\frac{10ac^2-3b^2c}{72a^2}+e$$

ここで $\gamma^2=\left(\dfrac{-3b+\sqrt{3(3b^2-8ac)}}{12a}\right)^2$

$$=\frac{(3b^2-4ac)-b\sqrt{3(3b^2-8ac)}}{24a^2}$$

であるから，

$$y=\left(-\frac{3b^2-8ac}{6a}\gamma+\frac{6ad-bc}{6a}\right)x+\frac{3b^2-8ac}{6a}\gamma^2+\frac{b(3b^2-8ac)}{24a^2}\gamma-\frac{10ac^2-3b^2c}{72a^2}+e$$

$$=\left\{\frac{9b(b^2-4ac)-\sqrt{3(3b^2-8ac)^3}}{72a^2}+d\right\}x+\frac{24a^2c^2+9b^2(b^2-4ac)-b\sqrt{3(3b^2-8ac)^3}}{288a^3}+e \quad\cdots\cdots⑤$$

もう一本の接線は，$y=f'(\delta)(x-\delta)+f(\delta)$ より，

$$y=\left\{\frac{9b(b^2-4ac)+\sqrt{3(3b^2-8ac)^3}}{72a^2}+d\right\}x+\frac{24a^2c^2+9b^2(b^2-4ac)+b\sqrt{3(3b^2-8ac)^3}}{288a^3}+e \quad\cdots\cdots⑥$$

である。

ひたすら計算すると出るには出るが複雑なだけで，面白い結果ではない。時間を掛けて計算したのに無常を感じる瞬間である。ただ，この2本の接線の交点は，⑤，⑥より y を消去すると，

$$\frac{2\sqrt{3(3b^2-8ac)^3}}{72a^2}x=\frac{2b\sqrt{3(3b^2-8ac)}}{288a^3}$$

から，$x=-\dfrac{b}{4a}$ である。

⑤より，

$$y=\left\{\frac{9b(b^2-4ac)-\sqrt{3(3b^2-8ac)^3}}{72a^2}+d\right\}\left(-\frac{b}{4a}\right)+\frac{24a^2c^2+9b^2(b^2-4ac)-b\sqrt{3(3b^2-8ac)^3}}{288a^3}+e$$

$$=\frac{c^2}{12a}-\frac{bd}{4a}+e$$

したがって，次の命題が成り立つ。

> **【定理2】**
> 4次関数 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ (a\neq 0)$ について，$3b^2-8ac>0$ が成り立つならば，異なる2つの変曲点が存在し，その2点における2本の接線の交点は $\left(-\dfrac{b}{4a},\ \dfrac{c^2-3bd}{12a}+e\right)$ である。

変曲点における接線の方程式は，無理式が避けられないが，交点の座標は有理式である。

§4. 4次関数の2個の変曲点を結ぶ直線

2個の変曲点 $(\gamma,\ f(\gamma))$，$(\delta,\ f(\delta))$ を結ぶ直線の傾きは，

$$\frac{f(\gamma)-f(\delta)}{\gamma-\delta}$$

$$=\frac{a(\gamma^4-\delta^4)+b(\gamma^3-\delta^3)+c(\gamma^2-\delta^2)+d(\gamma-\delta)}{\gamma-\delta}$$

$$=a(\gamma+\delta)(\gamma^2+\delta^2)+b(\gamma^2+\gamma\delta+\delta^2)+c(\gamma+\delta)+d$$

ここで，解と係数の関係より，

$\gamma+\delta=-\dfrac{b}{2a}$，$\gamma\delta=\dfrac{c}{6a}$ であるから，

$$\frac{f(\gamma)-f(\delta)}{\gamma-\delta}=a\left(-\frac{b}{2a}\right)\left\{\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-2\frac{c}{6a}\right\}+b\left\{\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{6a}\right\}+c\left(-\frac{b}{2a}\right)+d$$

$$=\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d$$ となる。

異なる2個の変曲点を結ぶ直線の方程式は，

$y=\left\{\dfrac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d\right\}(x-\gamma)+f(\gamma)$ である。

ここで，$f(\gamma)$ を $6a\gamma^2+3b\gamma+c\,(=0)$ で割ると，

$$f(\gamma)=(6a\gamma^2+3b\gamma+c)\times\left(\frac{1}{6}\gamma^2+\frac{b}{12a}\gamma+\frac{10ac-3b^2}{72a^2}\right)+\frac{24a^2d-12abc+3b^3}{24a^2}\gamma+e-\frac{10ac^2-3b^2c}{72a^2}$$

$$=\frac{24a^2d-12abc+3b^3}{24a^2}\gamma+e-\frac{10ac^2-3b^2c}{72a^2}$$

よって，

$$y=\left\{\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d\right\}x-\left\{\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d\right\}\gamma+\frac{24a^2d-12abc+3b^3}{24a^2}\gamma+e-\frac{10ac^2-3b^2c}{72a^2}$$

$$=\left\{\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d\right\}x+\left(\frac{24a^2d-12abc+3b^3}{24a^2}-\frac{b^3-4abc+8a^2d}{8a^2}\right)\gamma+e-\frac{10ac^2-3b^2c}{72a^2}$$

$$=\left\{\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d\right\}x+e-\frac{10ac^2-3b^2c}{72a^2}$$

$$=\left\{\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d\right\}x+\frac{c(3b^2-10ac)}{72a^2}+e$$

となる。よって，次の性質が成り立つ。

【定理3】

4次関数 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ (a\neq 0)$ について，$3b^2-8ac>0$ が成り立つならば，異なる2個の変曲点が存在し，その2点を結ぶ直線の方程式は，

$$y=\left\{\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d\right\}x+\frac{c(3b^2-10ac)}{72a^2}+e$$

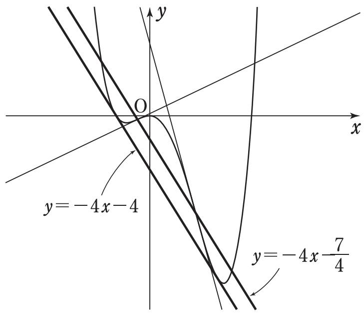
である。

また，定理1と定理3より次の性質が成り立つ。

【定理4】

4次関数 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ (a\neq 0)$ について，$3b^2-8ac>0$ が成り立つならば，異なる2点で接する接線と異なる2個の変曲点を結ぶ直線は平行である。

例　$y=x^2(x^2-2x-3)$ 〔06　慶応大〕



変曲点における接線の方程式は，

$y=(-4+3\sqrt{3})x+\dfrac{11-6\sqrt{3}}{4}$

変曲点 $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-15+8\sqrt{3}}{4}\right)$

$y=(-4-3\sqrt{3})x+\dfrac{11+6\sqrt{3}}{4}$

変曲点 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-15-8\sqrt{3}}{4}\right)$

2本の接線の交点は，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ である。

また，異なる2点で接する接線の方程式は，

$y=-4x-4$　　2接点は $(-1,\ 0)$，$(2,\ -12)$

異なる2個の変曲点を結ぶ直線の方程式は，

$y=-4x-\dfrac{7}{4}$

《参考文献》

〔1〕 数研通信47号2003年8月
3次関数の指導について（横山政道）
〔2〕 佐賀県高等学校教育研究会数学部会研究集録
H21「一般化その2」（宮原敏明）

（佐賀県立鳥栖高等学校）