軌跡の方程式の求め方の研究

村上（むらかみ）　仙瑞（せんずい）

§1. はじめに

軌跡を求める手順として，教科書には（または受験参考書には）次のようなことがかかれている。

1. 求める軌跡上の動点の座標を $(x,\ y)$ と表し，与えられた条件を座標の間の関係式で表す。

2. 軌跡の方程式を導き，その方程式の表す図形を求める。

3. その図形上の点が条件を満たしていることを確かめる。（これが明らかな場合は，これを省略することがある）

となっている。特に，この3番目の手順において，生徒からの質問をよく受ける。

教科書や受験参考書を読むと，最初の方の軌跡の例題は，式で証明することなく，とってつけたように「逆に求めた式の任意の点は，条件を満たす」というようにかいているのであるが，いつの間にか省かれている。「明らか」なときに省いていいのであるが，その「明らかさ」も本人によりけりである。これでは，生徒が疑問に思うのも無理もない。明らかなときとはどういうときか，どうして逆を確かめる必要があるのか。数学を勉強していく場合，「明らか」という言葉は御法度である。「明らか」というところを，いざ証明したり，説明したりしようとすると難しい場合が多々ある。数学的な理由があるからこそ，３の作業が必要なのである。なぜ必要なのか，それをこのレポートで私の研究成果を発表していきたい。

1．1　軌跡の方程式を求めるということ

与えられた条件から式変形をして軌跡の方程式を導くわけだが，これは「十分条件」（与えられた条件）から「必要条件」（軌跡の方程式）に変形したに過ぎず，同値変形でないということなのである。このことを押さえておく必要がある。

同値とは，わかりやすくいえば，式の言い換えである。２つの対象が“ある意味で”同じである，あるいは同一視できるという関係を一般化した概念である。

結局，軌跡を求めるときの３という操作は，与えられた十分条件から必要条件である式が出たが，同値性が成り立っているかどうか調べよと述べているのである。要は同値性を確認しながら，軌跡の方程式を求めればよいのである。

1．2　授業での取り組み

同値性を確認する問題として，１次方程式を利用する。例えば，１次方程式 $3x-1=-2x+4$ を解くと，$x=1$ を得るが，これは「等式の性質」を利用した同値変形から解が求まるのである。この１次方程式の両辺を２乗して，２次方程式 $x^2+2x-3=0$ として，$x=1,\ -3$ としないはずである。もちろん，$x=-3$ は元の１次方程式の解ではない。何も考えずに両辺を２乗すると同値性が失われる例である。また，$y=x$ のグラフをかかせるときに，$y^2=x^2$ と両辺を２乗して $y=x$ と $y=-x$ をかかないはずである。グラフをかかせることによって，２乗をすると解の存在範囲が変わってくるということも授業では伝える。簡単に式の両辺を２乗してはいけない，軌跡の分野こそ同値関係とは何かを理解させることのできる分野だと考えている。

軌跡の方程式を求めるパターンとしては，

1. 図形的な条件から式をたてて得られる軌跡の方程式

2. 媒介変数で与えられた座標が描く軌跡の方程式

と大きく2つある。それぞれについて，同値関係を意識しながら解説していきたいと思う。その前に，軌跡の問題では，条件式の両辺を2乗することが多いが，このときに同値性を注意して確認する必要があり，生徒にはまず，

補題　2乗するときの同値性

$a>0$，$b>0$ のとき，$a=b \Longleftrightarrow a^2=b^2$

であることを確認させる。

《証明》

(i)　$a=b \Rightarrow a^2=b^2$ の証明

$a=b$ の両辺を2乗すれば $a^2=b^2$

(ii)　$a^2=b^2 \Rightarrow a=b$ の証明

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=0$ で，仮定から

$a>0$，$b>0$ なので $a+b>0$

よって，$a-b=0$ つまり，$a=b$

(i)，(ii)より同値関係が証明できた。

それでは，軌跡のそれぞれのパターン問題を，同値関係を意識しながら解いて確かめてみる。

§2.『図形的な条件から式をたてて得られる軌跡の方程式』の問題

2．1　円の方程式

軌跡の方程式の代表格である $x^2+y^2=r^2$ も実は，同値性で式変形された円の方程式である。つまり，原点から距離が r である点の集合は，$\sqrt{x^2+y^2}=r$ であるが，$\sqrt{x^2+y^2}>0$，$r>0$ であるから，

$$\sqrt{x^2+y^2}=r \Longleftrightarrow x^2+y^2=r^2$$

が成り立つことに注意する。

2．2　アポロニウスの円

2点 A$(-4,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ からの距離の比が 2：1 である点の軌跡の方程式を求める。

【考え方】（同値関係を保ちながら式を変形していけばよい）

条件を満たす点を P$(x,\ y)$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1 &\Longleftrightarrow \mathrm{AP}=2\mathrm{BP}\\ &\Longleftrightarrow \mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2\\ &\quad(\text{なぜなら，}\mathrm{AP}>0,\ 2\mathrm{BP}>0\ \text{だから})\\ &\Longleftrightarrow (x+4)^2+y^2=4\{(x-2)^2+y^2\}\\ &\Longleftrightarrow (x-4)^2+y^2=16\end{aligned}$$

2．3　直角三角形の軌跡

長さ $2a$ の線分 AB がある。$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ となる点の軌跡の方程式を求める。

【考え方】（同値関係を保ちながら式を変形していけばよい）

線分 AB を x 軸，線分 AB の中点を原点にとり，A$(-a,\ 0)$，B$(a,\ 0)$ とする。条件を満たす点を P$(x,\ y)$ とすると，A，P，B が一直線上にあるとき，$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ とならないので（直角三角形ができないので），つまり，点Pが A，B にあるときの点Pは除く。よって，次のような展開ができる。

点Pは，$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ を満たす。ただし，点Pが A，B にあるときの点Pは除く。

$(\Longleftrightarrow)$

点Pは $\mathrm{AB}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ を満たす。ただし，点Pが A，B にあるときの点Pは除く。

$(\Longleftrightarrow)$

$(2a)^2=\{(x+a)^2+y^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$

ただし，A$(-a,\ 0)$，B$(a,\ 0)$ を除く。

$(\Longleftrightarrow)$

$x^2+y^2=a^2$ ただし，A$(-a,\ 0)$，B$(a,\ 0)$ を除く。

となり，求める軌跡は，$x^2+y^2=a^2$ ただし，点 A$(-a,\ 0)$，B$(a,\ 0)$ を除く となる。以上のように同値関係で展開すれば，「逆に」を調べなくてよいのである。

2．4　楕円の方程式

これは，数学Cの範囲になるが，楕円の方程式を求めるとき，2回2乗して求めるわけであるが，証明の最後には必ず，「逆に～を満たすので…」と断りがきして同値関係の証明を簡単にすましている。中にはこの最後の「逆に」の部分を省く教科書まである。2次曲線の方程式こそ，軌跡の同値関係を考えるのにふさわしい教材である。今回は同値関係を考えながら，式を展開していきたい。細かい条件などは教科書を参考にしていただきたい。

楕円の定義

F$(c,\ 0)$，F$'(-c,\ 0)$ の2点からの距離の和が $2a$ である点の集合の方程式を求める。

【考え方】　楕円上の点を P$(x,\ y)$ とおくと，

$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'>\mathrm{FF}'=2|c|$ より，$a>c>0$ とする。
$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a$ より，

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \qquad (1)$$

つまり，

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (2)$$

ここで，$\sqrt{(x-c)^2+y^2}>0$，$\sqrt{(x+c)^2+y^2}>0$，$2a>0$ より，右辺 $2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}>0$ であるので，両辺を2乗しても同値である。つまり，2乗して整理すると，

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx \qquad (3)$$

を得るが，この式の左辺は正であるが，右辺は x によって正になるか，負になるかはわからないので，両辺を2乗しても同値とはいえないが，とりあえず2乗して整理すると，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \qquad (4)$$

を得る。(3)から(4)という点 $(x,\ y)$ の集合が得られたが，(4)の式より x の範囲 $-a\leqq x\leqq a$ も得られる。今度は逆に，(4)を仮定して，「等式の性質」を使って同値変形をして，

$$a^2\{(x+c)^2+y^2\}=(a^2+cx)^2 \qquad (5)$$

を得る。ここで，仮定から $-a\leqq x\leqq a$，$a>c>0$ より，$a^2+cx>0$ を得て，よって，式(5)は，

$$\{a\sqrt{(x+c)^2+y^2}-(a^2+cx)\}$$
$$\times\{a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(a^2+cx)\}=0 \qquad (6)$$

と因数分解でき，$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(a^2+cx)>0$ なので，

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx \qquad (7)$$

を得ることができて，(3)と(4)が同値関係であることが証明された。

つまり，(1)⇔(2)⇔(3)⇒(4)⇒(3)という順序をたどって，(1)⇔(4)という同値関係を得る。ここで(4)において，$a^2-c^2=b^2$ とおいて，楕円の方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (8)$$

を得て，(1)の点の集合と(8)の点の集合が同じであることがわかるのである。

2．5　双曲線の方程式

双曲線の軌跡の方程式を同様に同値性を考えてみる。

双曲線の定義

> $\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ の2点からの距離の差が $2a$ である点の集合の方程式を求める。

【考え方】　双曲線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおき，$c>a>0$ とする。$\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'=\pm 2a$ より，

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \qquad (9)$$

または

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-2a \qquad (10)$$

である。今回はとりあえず(9)の式だけ変形をしてみる。(9)より，

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+2a \qquad (11)$$

で両辺が正で(ただし $\sqrt{(x-c)^2+y^2}>\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，つまり $x<0$ のときであることに注意)，よって，両辺を2乗して整理すると，

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-a^2-cx \qquad (12)$$

を得るが，(11)⇔(12)であることに注意。次に，(12)の右辺であるが，今の段階では x によって正負の判断がつかないので，とりあえず2乗して整理すると

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1 \qquad (13)$$

を得る。ここで，仮定が(9)の式から $x<0$ で，(13)から，さらに $x\leqq -a$ を得る。

今度は逆に，(13)から，(9)が得られるか証明してみる。(13)より，「等式の性質」を使って同値変形をすると，

$$\{a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\}^2=(-a^2-cx)^2 \qquad (14)$$

を得る。よって，

$$\{a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(-a^2-cx)\}$$
$$\times\{a\sqrt{(x+c)^2+y^2}-(-a^2-cx)\}=0 \qquad (15)$$

と因数分解できるわけだが，$x\leqq -a$ かつ $c>a>0$ より，$-a^2-cx\geqq a^2-ac>0$ がいえ，$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(-a^2-cx)>0$ となるので，

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-a^2-cx \qquad (16)$$

を得ることができた。以上の証明をまとめてみると，(9)⇔(11)⇔(12)⇒(13)⇒(12)となり，(9)⇔(13)(ただし，$x\leqq -a$ の範囲の部分)という同値関係が得られる。これは，式(9)の点の集合と式(13)の $x\leqq -a$ の範囲の部分の集合は同じであることをいっているのである。同様にして，(10)⇔(13)(ただし，$x\geqq a$ の範囲の部分)が証明できて，これらをまとめると(13)において，$c^2-a^2=b^2$ とおくことによって，

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (17)$$

となり，(9)または(10)⇔(17)という同値関係を得て，(9)または(10)と(17)の点の集合は同じであることが証明され，双曲線の方程式が導かれたわけである。

次にパラメーター表示の軌跡について考える。このパラメーターの軌跡は図形の方程式と違い，実は写像という考えが必要になって，これも必要十分な考えが必要になる。これを詳しくひもといてみたい。

§3. 『媒介変数で与えられた座標が描く軌跡の方程式』の問題

青チャート数学 Ⅱ＋B に掲載されていた直線の交点の軌跡の問題を考えることにする。

3．1　媒介変数の交点の軌跡の方程式

> m は実数の変数とする。2 直線，
>
> $$mx-y=0 \qquad (18)$$
>
> $$x+my-m-2=0 \qquad (19)$$
>
> の交点Ｐはどのような図形を描くか。

まずこの問題の解き方として指針部分を読んでみると，「(18)，(19)を連立して交点の座標 $(x,\ y)=\left(\frac{m+2}{m^2+1},\ \frac{m^2+2m}{m^2+1}\right)$ からmを消去して，x, y の関係式を求めるのは計算が大変。だから，交点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とすると，$(x,\ y)$ は(18)，(19)を同時に満たすから，(18)，(19)はmをつなぎの文字とみた軌跡の条件式であるといえる。よって，(18)，(19)からmを消去してＰの x と y の関係式を求める」

確かにその通りかもしれないが，この短い文章で高校生がその真意を読み取ることは難しい。そこで，まず問題文を素直にとらえ，この問題の意味をしっかり考えてみることにする。そうすれば，この問題の意味がわかってくるであろう。

問題文を読むとmは実数全体を動くとかいてあるので，m の値を１つ決めると，2 本の直線が定まり交点が１つ決まる。つまり，

$$m \to \left(\frac{m+2}{m^2+1},\ \frac{m^2+2m}{m^2+1}\right)$$

という対応ができ（写像ができ），m を実数の範囲で動かすと，この交点の座標 $\left(\frac{m+2}{m^2+1},\ \frac{m^2+2m}{m^2+1}\right)$ はある図形をつくる。m に全ての実数を当てはめて，点をとっていって交点の動く様子を見ることは物理的に不可能である。

そこで発想を転換して，交点の座標が存在したとして，交点の座標が存在するための条件で式を作るのである。例えば，$(1,\ 3)$ は交点となり得るか。(18)，(19)の式に，$x=1$，$y=3$ を代入すると，(18)からは $m=3$, (19)からは $m=\frac{1}{2}$ を得て，$(1,\ 3)$ は交点とならない。$(2,\ 1)$ は交点となり得るか。(18)，(19)の式に，$x=2$，$y=1$ を代入すると，(18)からは $m=\frac{1}{2}$，(19)からは，m は全ての実数が答えより，$m=\frac{1}{2}$ としてよく，(18)，(19)から共に $m=\frac{1}{2}$ を得て，$(2,\ 1)$ は交点としてよいといった具合である。全ての $(x,\ y)$ について，交点になるかどうか調べるわけにはいかないので，そこで次のような解法の発想が生まれる。

解答

$(X,\ Y)$ が交点になったとするとして，X と Y は問題文の(18)，(19)の式を満たすので，

$$mX-Y=0 \qquad (20)$$

$$X+mY-m-2=0 \qquad (21)$$

が成り立つ。

よって，交点 $(X,\ Y)$ が存在するための必要十分条件は，(20)のmと(21)のmとが同じであること（(20)と(21)を満たすmが存在することである）ということである。

したがって，(20)よりmについて解くと，

$$m=\frac{Y}{X}\ (X \neq 0)$$

(21)よりmについて解くと，

$$m=\frac{2-X}{Y-1}\ (Y-1 \neq 0)$$

となるので，$(X,\ Y)$ が存在するための必要十分条件は式でかくと

$$\frac{Y}{X}=\frac{2-X}{Y-1}\ (X \neq 0,\ Y-1 \neq 0) \qquad (22)$$

と書き直すことができる。これを整理すると，

$$X^2+Y^2-2X-Y=0 \qquad (23)$$

を得る。この式は，$(X,\ Y)$ が交点となるための必要十分条件として求めた式であるから，$X=0$, $Y=1$ 以外は求める軌跡の方程式としてよいのである。よって，(23)の式は，条件を満たすための軌跡の

式として良いのであるが，同値性が確かめられていない $X=0$，$Y=1$ の場合は，きちんと調べないといけない。ここで導入部分の手順３を考えるとすると，$X=0$ と $Y=1$ は(23)の式を満たすとは限らないので，１つずつ調べることにするのである。

$X=0$ のとき，(23)より，$Y=1$，0 を得て，$Y=1$ のとき，(23)より，$X=2$，0 を得る。したがって，まとめると，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$ は(23)上の点であるが，これが(18)，(19)の交点になっているか調べないといけないのである。

交点が $(0,\ 0)$ になることはあるか。
$(X,\ Y)=(0,\ 0)$ を(18)，(19)に代入すると，(18)より m はすべての実数，(19)より $m=-2$ を得て，よって $(X,\ Y)=(0,\ 0)$ となる m は $m=-2$ で，$(0,\ 0)$ は交点になり得る。

交点が $(2,\ 1)$ になることはあるか。
$(X,\ Y)=(2,\ 1)$ を(18)，(19)に代入すると，(18)より $m=\dfrac{1}{2}$，(19)より m はすべての実数，よって $(X,\ Y)=(2,\ 1)$ となる m は $m=\dfrac{1}{2}$ で，$(2,\ 1)$ は交点になり得る。

交点が $(0,\ 1)$ になることはあるか。
$(X,\ Y)=(0,\ 1)$ を(18)，(19)に代入すると，(18)より解なし，(19)より解なし，よって $(X,\ Y)=(0,\ 1)$ となる m は存在しない。$(0,\ 1)$ は交点になりえない。

以上より，求める軌跡の方程式は，「円 $x^2+y^2-2x-y=0$ で，点 $(0,\ 1)$ を除く」となる。

チャートの解答では，$m=\dfrac{y}{x}$ として代入して m を消去しているが，この解法をみてもわかるように，m を消去するにも意味があるということである。X と Y の関係をただ導くために m を消去するのではなく，交点が存在するための必要十分として，m を消去するということである。このように媒介変数の入った軌跡の方程式を求める場合は，対応（写像）という概念を用いることがよいと思う。

§4．最後に

このレポートでは，必要条件や十分条件や同値など頻繁に使ってきたが，授業をしていても生徒がその内容の理解を完全に理解している生徒はたくさんはいない。必要・十分条件は数Aで学ぶことになっているが，数Ⅱの軌跡のところであらためてその重要性が試されるものだと考えている。

いざ楕円や双曲線の方程式を同値変形で証明してみると大変なことがわかる。軌跡の方程式の求め方の本質を理解しているかどうか，大学入試に出題してみてもおもしろいと考える。

《参考文献》

〔１〕『数学 C』，数研出版
〔２〕『チャート式 基礎からの数学Ⅱ＋B』，数研出版

（兵庫県　甲南中学高等学校）