「恒等式」についての一考察

米江(よねえ) 慶典(よしのり)

§1. はじめに

恒等式については以前に拙稿『「三角関数の恒等式」についての一考察』(数研通信 54 号) で三角関数について考えましたが今回は少し見方を変えて考えます。

§2. 考察問題

いくつかの問題を発展事項と共に考えます。問題 1 は〔2〕からの引用です。

問題 1

> 次の 2 つの条件を同時に満たす x の 3 次の多項式 $P(x)$ を求めよ。
> (i) 任意の 2 次以下の多項式 $Q(x)$ に対して
> $\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx=0$
> (ii) $P(1)=1$

【略解】

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a \neq 0)$,
$Q(x)=px^2+qx+r$

とおく。このとき，条件(i)から

$$p\left(\frac{b}{5}+\frac{d}{3}\right)+q\left(\frac{a}{5}+\frac{c}{3}\right)+r\left(\frac{b}{3}+d\right)=0$$

が任意の実数 p, q, r に対して成り立つ。

ゆえに $\frac{b}{5}+\frac{d}{3}=0$, $\frac{a}{5}+\frac{c}{3}=0$, $\frac{b}{3}+d=0$

また，条件(ii)から $a+b+c+d=1$

これらを解いて

$a=\frac{5}{2}$ (これは $a \neq 0$ を満たす), $b=0$,

$c=-\frac{3}{2}$, $d=0$

よって $P(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$ ■

【考察】

条件(i)を

“任意の 2 次以下の多項式 $Q(x)$ に対して
$\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx=0$”

⇒ “任意の実数 p, q, r に対して
$\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx=0$”

すなわち

“3 つの文字に関する恒等式”

と考えて処理すればよいことになります。

【発展】

この問題の $P(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$ は，ルジャンドルの多項式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

の $n=3$ の場合になります。なお，ルジャンドルの多項式については入試問題として多数出題されています。例えば，多項式 $P(x)$, $Q(x)$ の内積は

$$(P(x),\ Q(x))=\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$

によって定義され，この内積が

$$(P_m(x),\ P_n(x))=\begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \dfrac{2}{2n+1} & (m=n \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たす ($m \neq n$ のときの $P_m(x)$ と $P_n(x)$ の直交性) ことや，数学Ｂで学習するベクトルの内積の性質を満たすことを確認させてもよいでしょう。

次は，関数方程式から 2007 年 京都大学 前期 理系 の問題を考えます。なお，設問は考察には関係ありませんが参考として掲載します。

問題 2

> すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$, $f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 a, b に対して
> $1+f(a)f(b) \neq 0$ であって
> $$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている。

(1) 任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。

この問題 2 の仮定

“$f(0)=0$”

は

“関数 $f(x)$ の微分可能性”，

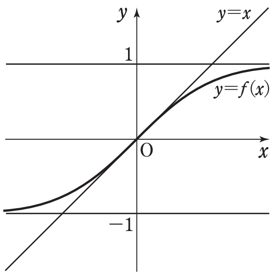
“$f'(0)=1$”

および

“任意の実数 a，b に対して

$1+f(a)f(b)\neq 0$ であって

$f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ を満たしている”



ことから求めることができます。更に，微分方程式を解くことによって

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

を得ます。このことから問題 2 は右上図からも分かるように明らかです。また，問題 2 においては，入試問題の観点から

“任意の実数 a，b に対して

$1+f(a)f(b)\neq 0$ を満たしている”

ことが仮定されていますが，一般的に記述の必要はないと考えてもよいでしょう。

ここに，問題 2 を次の問題 2′として出題してもよいことになります。ただし，設問は省略します。

問題 2′

すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 a，b に対して

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている。

ここで，問題 2′においての $f(0)=0$ の求め方について考えます。

【考察 1】

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)} \quad \cdots\cdots\text{①}$$

①において，特に，$b=0$ とおくと

$$f(a)=\frac{f(a)+f(0)}{1+f(a)f(0)}$$

したがって，$f(0)[\{f(a)\}^2-1]=0$

これが

“任意の実数 a についての恒等式”

であるから，$f(0)=0$

【考察 2】

①において，特に，$b=0$ とおくと

$$f(a)=\frac{f(a)+f(0)}{1+f(a)f(0)}$$

したがって

$f'(a)$

$$=\frac{f'(a)\{f(0)f(a)+1\}-\{f(a)+f(0)\}f(0)f'(a)}{\{f(0)f(a)+1\}^2} \quad \cdots\cdots\text{②}$$

②において，特に，$a=0$ とおくと

$$[\{f(0)\}^2+3]\{f(0)\}^2=0$$

よって，$\{f(0)\}^2+3>0$ であるから

$$f(0)=0$$

【考察 3】

①において，特に，$a=b=0$ とおくと

$$f(0)=\frac{f(0)+f(0)}{1+f(0)f(0)}$$

したがって　$f(0)[\{f(0)\}^2-1]=0$

よって　$f(0)=0$，$f(0)=1$，$f(0)=-1$

以上，考察 1 から考察 3 を考えましたが，実際，生徒は考察 1，考察 2 で考えることはほとんどなく，考察 3 で考え途中で頓挫する場合が圧倒的です。恒等式の学習内容の再確認からも

“問題 1 の略解と問題 2′ の考察 1 を合わせて指導する”

ことも重要だと考えます。

【発展】

関数方程式に関する出題は理系においては珍しくありませんが文系においては稀です。発展事項として授業に取り入れても興味深いと考えます。1997 年 明治大学 政治経済学部 の入試問題を問題 3 として掲載しておきます。

問題 3

実数全体で定義された実数値関数 $f(x)$ が次の条件(a)，(b)を満たすとする。

(a) $1+x\leqq f(x)$

(b) $f(x)f(y)\leqq f(x+y)$

このとき，次の各問に答えよ。

(1) $f(0)=1$ を示せ。

(2) 任意の実数 x に対して，$f(x)>0$ を示せ。

(3) $x<0$ に対して，$f(x)<1$ を示せ。

§3. 授業実践にあたっての注意

虚数単位 i と恒等式について，複素数の相等

$$a+bi=c+di \iff a=c \text{ かつ } b=d$$

（a，b，c，d は実数）

を　　“i についての恒等式”

と考える生徒もいますから，数学Ⅱの授業時に注意が必要です。

また，方程式と恒等式についても，例えば，2次方程式 $x^2-1=0$ を解くとき生徒の代表的な解答として次の考察1，考察2が挙げられます。

【考察1】

$$x^2-1=0$$

したがって　$(x-1)(x+1)=0$

よって　$x=\pm1$

【考察2】

$$x^2-1=(x-1)(x+1)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

よって　$x=\pm1$

解答としては当然 考察1 ですが，考察2 を解答とする生徒も少なくありません。③について

“$x^2-1=(x-1)(x+1)$ は恒等式であり，

$(x-1)(x+1)=0$ は方程式である”

ことからこれらを③として書き表すのはやはり適当でないと考えます。

§4. おわりに

生徒に「$a+bx=c+dx$」を解かせると多くが，恒等式と考え「$a=c$ かつ $b=d$」と答えます。題意の関係式を恒等式とみるか，方程式とみるかで場合を分けて答えることはほとんどありません。恒等式と方程式の違いはもちろんのこと問題2，問題3の関数方程式などと関連して指導する必要があると思います。また，教科書には多項式についての恒等式のみの記述しかありませんので，時機をみて問題2′の考察1などを取り上げてもよいのではないでしょうか。ご意見いただければ幸いです。

《参考文献》

〔1〕『改訂版 数学Ⅱ』数研出版株式会社

〔2〕『改訂版 教科書傍用 4STEP 数学Ⅱ＋B』数研出版株式会社

〔3〕『復刊 近代数学講座5 特殊函数』小松勇作 著 株式会社朝倉書店

（鳥取県立米子東高等学校）