内分点・外分点の位置ベクトルの公式の一般化

内田　康晴

§1. はじめに

「四面体に内心は必ずあるのか？」という前任校の同僚のつぶやきをきっかけに，空間内の点の位置ベクトルについて考察した。その結果「内分点・外分点の位置ベクトルの公式」が，多次元に一般化できることがわかった。高校数学でよく用いる公式の拡張であるので，報告させていただくことにした。

線分とその上の点である内分点Ｐの位置ベクトルの公式に対し，線分を三角形に置き換えて，三角形とその内部にある点Ｐの位置ベクトルに対しても，同様な公式が成り立つ。

さらに，この公式について，次のような一般化，多次元化が可能であることを示す。

［一般化１］　平面上で，点Ｐが三角形の外部にあっても公式はそのまま成り立つ。ただし，「裏返った三角形の面積は負」とする。

［一般化２］　空間内で，三角錐と点Ｐの位置ベクトルについても同様な公式が成り立つ。

［一般化３］　一般の次元のユークリッド空間で，n 次元の三角錐（単体と呼ばれる）と，点Ｐの位置ベクトルについても同様な公式が成り立つ。

そしてまた，連立方程式の解に関する「クラメルの公式」は，本質的には「拡張された分点の位置ベクトル公式」として図形的な解釈ができることを指摘する。

§2. 線分の分点の位置ベクトルの公式とその特徴

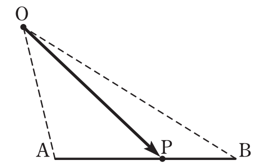
一般化の準備として，線分の分点の位置ベクトルの公式を確認しておきたい。

【定理１】（線分の分点の位置ベクトル）

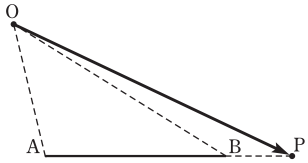
直線 AB 上の点Ｐについて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{PB}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\mathrm{AP}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\mathrm{PB}+\mathrm{AP}} \qquad \cdots(1)$$

$$=\frac{\mathrm{PB}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\mathrm{AP}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\mathrm{AB}} \qquad \cdots(2)$$



〔図１〕



〔図２〕

ただし，線分の長さ AP，PB は向きも考えて正負の符号をつける。

点Ｐが，線分 AB の内分点のときは同符号，外分点のときは異符号である。

【定理１の式の特徴】

(1)の式の分子は，掛け方が「互い違い」である点が特徴である。つまり，点Ｂから（点Ｐまで）の距離 PB を点Ａの位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に掛け，点Ａから（点Ｐまで）の距離 AP を点Ｂの位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に掛けてある。そして，分母は PB と AP の和であり，これは線分 AB の長さになっている。

この特徴を，記号の規則性に注目して述べれば，「分母の AB のＡをＰで置き換えた PB が点Ａの位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の係数であり，分母の AB のＢをＰで置き換えた AP が点Ｂの位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数になっている。」

この特徴は，一般化された分点公式でもそのまま成り立つ。

§3. 三角形の分点の位置ベクトルの公式

三角形 ABC と内部の点Ｐについても，定理１と類似の定理２が成り立つ。

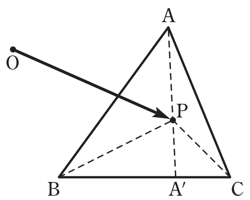
以後の拡張した公式も，定理２をひな形に考えることができるので，特にそれを意識して公式の形の特徴と証明を確認しておく。

【定理２】（三角形の分点の位置ベクトル）

平面上で三角形 ABC の内部の点Ｐについて

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\triangle PBC\cdot\overrightarrow{OA}+\triangle APC\cdot\overrightarrow{OB}+\triangle ABP\cdot\overrightarrow{OC}}{\triangle PBC+\triangle APC+\triangle ABP} \quad \cdots(3)$$

$$=\frac{\triangle PBC\cdot\overrightarrow{OA}+\triangle APC\cdot\overrightarrow{OB}+\triangle ABP\cdot\overrightarrow{OC}}{\triangle ABC} \quad \cdots(4)$$



〔図３〕

【定理２の式の特徴】

定理２の式(4)は，次のように定理１と同様の特徴を持っている。すなわち，「分母の △ABC のＡをＰに置き換えた △PBC が，点Ａの位置ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の係数になっている。点Ｂ，Ｃについても同様である。」

△ABC は，点Ｐによって３つの小さな三角形に分けられている。(4)の分子においては，各頂点の位置ベクトルに対して，その対極にある小さな三角形の面積が係数としてかけられている。これは，ある意味「互い違い」になっているといえる。

【定理２の(3)の証明】

直線 AP と直線 BC との交点を点 A′ とする。

（[図３]）

次の補題１，補題２が成り立つ。

【補題１】　△ABP：△APC＝BA′：A′C　…(21)

（証明略）

【補題２】　(△ABP＋△APC)：△PBC
＝AP：PA′　…(22)

（証明略）

これらの補題を用いて，定理２を証明する。

定理１から

$$\overrightarrow{OA'}=\frac{A'C\cdot\overrightarrow{OB}+BA'\cdot\overrightarrow{OC}}{A'C+BA'}$$

補題１から

$$=\frac{\triangle APC\cdot\overrightarrow{OB}+\triangle ABP\cdot\overrightarrow{OC}}{\triangle APC+\triangle ABP} \quad \cdots(23)$$

ここでまた定理１から

$$\overrightarrow{OP}=\frac{PA'\cdot\overrightarrow{OA}+AP\cdot\overrightarrow{OA'}}{PA'+AP}$$

補題２から

$$=\frac{\triangle PBC\cdot\overrightarrow{OA}+(\triangle ABP+\triangle APC)\cdot\overrightarrow{OA'}}{\triangle PBC+(\triangle ABP+\triangle APC)}$$

(23)を代入して

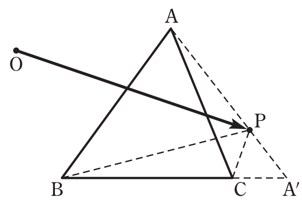
$$=\frac{\triangle PBC\cdot\overrightarrow{OA}+\triangle APC\cdot\overrightarrow{OB}+\triangle ABP\cdot\overrightarrow{OC}}{\triangle PBC+\triangle APC+\triangle ABP} \quad \cdots(24)$$

（定理２の(3)の証明終わり）

【定理 2′】

点Ｐが三角形の外側や周上にある場合を含めて定理２の(3)，(4)は成り立つ。

ただし，「裏返った三角形の面積は負」とする。



〔図４〕

【定理 2′ の証明】「裏返った三角形の面積は負」とすれば，基本的に定理２の証明がそのまま定理 2′ の証明になる。

定理２では内分点であった点Ｐや点 A′ が，定理 2′ では，ときには外分点になる場合もある。

ただし，次の場合には，出発点となる点 A′ がとれないなど，定理２の証明が当てはまらない。

(ア)　点Ｐが三角形 ABC のいずれかの頂点と一致しているとき

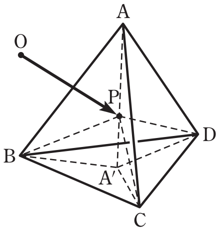
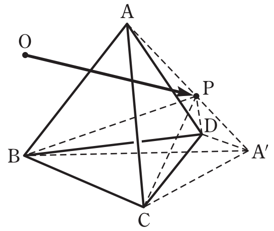
(イ)　AP∥BC で，直線 AP と直線 BC が交わらないとき

しかし，(ア)のときは，(3)，(4)は明らかに成り立つ。また，(イ)のときは，「直線 AP と直線 BC の交点 A′」の代わりに「直線 BP と直線 CA の交点 B′」を考えて，同様に議論すればよい。さらに BP∥CA で交点 B′ も存在しないときは，四角形 PBCA が平行四

辺形のときであるから，CP と AB はその平行四辺形の対角線となり必ず交点 C′ がとれ，これについて同様に考えればよい。

§4. 三角錐の分点の位置ベクトルの公式

さらに，定理 2 の三角形 ABC の代わりに三角錐 ABCD を考えた定理 3 が成り立つ。
証明も，定理 2 の証明と同様である。

> **【定理 3】**（三角錐の分点の位置ベクトル）
> 三角錐 ABCD を含む 3 次元空間 ABCD 内の点 P について
>
> $$\overrightarrow{OP} = \frac{|PBCD|\cdot\overrightarrow{OA}+|APCD|\cdot\overrightarrow{OB}+|ABPD|\cdot\overrightarrow{OC}+|ABCP|\cdot\overrightarrow{OD}}{|PBCD|+|APCD|+|ABPD|+|ABCP|} \quad \cdots(5)$$
>
> $$= \frac{|PBCD|\cdot\overrightarrow{OA}+|APCD|\cdot\overrightarrow{OB}+|ABPD|\cdot\overrightarrow{OC}+|ABCP|\cdot\overrightarrow{OD}}{|ABCD|} \quad \cdots(6)$$
>
> 
>
> 〔図 5〕
>
> 
>
> 〔図 6〕
>
> ここで，例えば記号 |PBCD| は，三角錐 PBCD の体積を表すものとする。ただし，体積は正負の符号付きで考え，点 P が四面体 ABCD の内部にあるときはすべて正とし，点 P が四面体 ABCD の外部に移動したときは，裏返った三角錐（頂点 P が，各底面〈を延長した平面〉を通り抜けて反対側へ移動したもの）の体積は負とする。

【定理 3 の(5)の証明】

点 P が，三角錐 ABCD のいずれかの頂点と重なるときは，明らかに(5)並びに(6)が成立する。よって，点 P は点 A，B，C，D のいずれとも一致しない場合を考える。

直線 AP と平面 BCD との交点を点 A′ とする。(〔図 5〕〔図 6〕：定理 2′ のときと同様に，同じように決める B′，C′，D′ の少なくともひとつは必ず存在するので，それについて同様の議論ができる。)

次の補題 3，補題 4 が成り立つ。

> **【補題 3】** $|APCD| : |ABPD| : |ABCP|$
> $= \triangle A'CD : \triangle BA'D : \triangle BCA' \quad \cdots(31)$

【証明】 高さの等しい三角錐の体積比は，底面積の比であることから

$$|AA'CD| : |ABA'D| : |ABCA'| = \triangle A'CD : \triangle BA'D : \triangle BCA' \quad \cdots(32)$$

$$|PA'CD| : |PBA'D| : |PBCA'| = \triangle A'CD : \triangle BA'D : \triangle BCA' \quad \cdots(33)$$

(32)，(33)の左辺の対応する三角錐を差し引きしたものが，(31)の左辺の対応する三角錐であるから，補題 1 の証明と同様に「加比の理」(「減比の理」？)により(31)が導かれる。（補題 3 の証明終わり）

> **【補題 4】**
> $(|APCD|+|ABPD|+|ABCP|) : |PBCD|$
> $= AP : PA' \quad \cdots(34)$

【証明】 底面の共通な三角錐の体積比は，高さの比に等しいから

$$|AA'CD| : |PA'CD| = AA' : PA'$$

したがって

$$(|AA'CD|-|PA'CD|) : |PA'CD| = (AA'-PA') : PA'$$

つまり　$|APCD| : |PA'CD| = AP : PA'$

同様にして　$|APDB| : |PA'DB| = AP : PA'$

$|APBC| : |PA'BC| = AP : PA'$

これら 3 つの式から加比の理により(34)が得られる。

（補題 4 の証明の終わり）

これらの補題を用いて定理 3 を証明する。

まず，定理 2 より

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{\triangle A'CD\cdot\overrightarrow{OB}+\triangle BA'D\cdot\overrightarrow{OC}+\triangle BCA'\cdot\overrightarrow{OD}}{\triangle A'CD+\triangle BA'D+\triangle BCA'}$$

補題 3 から

$$= \frac{|APCD|\cdot\overrightarrow{OB}+|ABPD|\cdot\overrightarrow{OC}+|ABCP|\cdot\overrightarrow{OD}}{|APCD|+|ABPD|+|ABCP|} \quad \cdots(35)$$

一方，補題 1 から

$$\overrightarrow{OP} = \frac{PA'\cdot\overrightarrow{OA}+AP\cdot\overrightarrow{OA'}}{PA'+AP}$$

補題 4 から

$$= \frac{|PBCD|\cdot\overrightarrow{OA}+(|APCD|+|ABPD|+|ABCP|)\cdot\overrightarrow{OA'}}{|PBCD|+(|APCD|+|ABPD|+|ABCP|)} \quad \cdots(36)$$

(35)を代入して

$$=\frac{|\mathrm{PBCD}|\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+|\mathrm{APCD}|\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\mathrm{ABPD}|\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\mathrm{ABCP}|\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\mathrm{PBCD}|+|\mathrm{APCD}|+|\mathrm{ABPD}|+|\mathrm{ABCP}|} \quad \cdots(37)$$

（定理３の(5)の証明終わり）

§5. 分点の一般公式

定理１から定理３は一連のものであり，次元を上げても一般的に成り立つことが推測される。証明についても同様にできるとも言えそうである。ただ，図のパターンが多岐にわたり,「同様に」ですませてよいか躊躇する面もある。

ところが，以下のように考えることで，定理の一般形とその証明がよりすっきりとした形で得られる。

定理２で，右辺に登場するベクトルを１次独立なものにするために，基準にする点Oを O＝A となるようにとると，(4)は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\triangle\mathrm{PBC}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\triangle\mathrm{OPC}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\triangle\mathrm{OBP}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\triangle\mathrm{OBC}} \quad \cdots(41)$$

$$=\frac{\triangle\mathrm{OPC}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\triangle\mathrm{OBP}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\triangle\mathrm{OBC}} \quad \cdots(42)$$

また，三角形の面積は，縦ベクトルを 第１列，第２列に並べて作った行列の行列式で表されるから

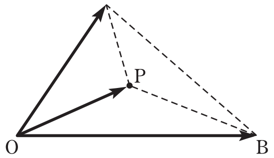
$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}| \quad \cdots(43)$$

のようになる。この表し方は,「裏返ると，符号は負」にも対応している。

このことを用いて(5)を書き換え，係数 $\frac{1}{2}$ も約せば次の定理４が得られる。

【定理４】 三角形OBC を含む平面OBC 上の点Pについて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}|} \quad \cdots(7)$$



〔図７〕

この定理４の形から，定理の一般形が見えてくる。そこで登場する n 次元の三角錐は，n 次元単体と呼ばれる。$n+1$ 個の点 A_1，A_2，…，A_{n+1} が n 次元単体を作るとき，n 個の縦ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}$，…，$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{n+1}}$ は１次独立である。

【定理５】 n 次元ユークリッド空間に，n 次元単体を作る $n+1$ 個の点O，A_1，A_2，…，A_n があるとき，空間内の任意の点Pの位置ベクトルについて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdots\overrightarrow{\mathrm{OA}_{k-1}}\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\ \overrightarrow{\mathrm{OA}_{k+1}}\cdots\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\ \overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdots\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}|} \quad \cdots(8)$$

ただし，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\ \overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\ \cdots\ \overrightarrow{\mathrm{OA}_n}|$ 等は，記号｜ ｜の中の縦ベクトルが作る n 次正方行列の行列式である。この定理は，クラメルの公式から直ちに得られる。（クラメルの公式そのものである。）

【定理５の証明】

係数行列が正則な n 元１次連立方程式

$$x_1\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+x_2\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\cdots+x_k\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}+\cdots+x_n\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OP}} \quad \cdots(51)$$

すなわち

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\ \overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\ \cdots\ \overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\ \cdots\ \overrightarrow{\mathrm{OA}_n})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_k\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

の解は，クラメルの公式より

$$x_k=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdots\overrightarrow{\mathrm{OA}_{k-1}}\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\ \overrightarrow{\mathrm{OA}_{k+1}}\cdots\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\ \overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdots\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}|} \quad \cdots(52)$$

(52)を(51)に代入すると(11)が得られる。

（定理５の証明終わり）

ここで，n 次元単体 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{n+1}$ の体積を $|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{n+1}|$ で表すと,

$$|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{n+1}|=\frac{1}{n!}|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}\ \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}\ \cdots\ \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}|$$

である。

例えば，三角形の場合，面積は同じ底辺と高さを持つ平行四辺形の面積の $\frac{1}{2}$ であり

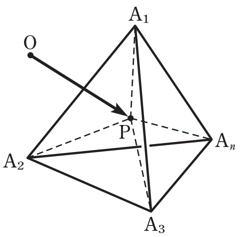
$$|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3|=\frac{1}{2!}|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}\ \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}|$$

３次元の三角錐の場合，体積は同じベクトルで決まる平行六面体の体積の $\frac{1}{6}$ であり（底面が三角形であるから底面積は $\frac{1}{2}$，錐であるから体積は柱の

$\frac{1}{3}$ なので，結局 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3!}$ 倍)

$$|\mathrm{A_1A_2A_3A_4}|=\frac{1}{3!}|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\ \overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}\ \overrightarrow{\mathrm{A_1A_4}}|$$

このことを用いると n 次元の場合についての定理 6 が得られる。

> **【定理 6】** n を自然数とする。n 次元ユークリッド空間に，n 次元の単体 $\mathrm{A_1A_2\cdots A_{n+1}}$ があるとき，n 次元ユークリッド空間 $\mathrm{A_1A_2\cdots A_{n+1}}$ 内の任意の点Pの位置ベクトルについて
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\sum_{k=1}^{n+1}|\mathrm{A_1\cdots A_{k-1}PA_{k+1}\cdots A_{n+1}}|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}}{|\mathrm{A_1A_2\cdots A_{n+1}}|}\quad\cdots(9)$$
>
> ただし，$|\mathrm{A_1A_2\cdots A_{n+1}}|$ 等は，| |の中の点の作る n 次元単体の体積を表す。
>
> 
>
>
> 〔図 8〕

(証明略)

正確な定理 1 の n 次元版は，「より高次元の $m(\geqq n)$ 次元ユークリッド空間中に，n 次元の単体がある中で(9)が成立する。」ことである。これも，定理 6 の証明とほとんど同じである。

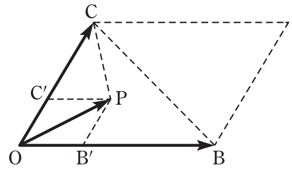
§6. クラメルの公式の図形的解釈

クラメルの公式は，2 次元の場合(7)である。これは，分母・分子にそれぞれ係数 $\frac{1}{2}$ を掛けることで，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\triangle\mathrm{OPC}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\triangle\mathrm{OBP}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\triangle\mathrm{OBC}}\quad\cdots(42)$$

を意味する。(〔図 7〕) 分母は全体の $\triangle$OBC の面積である。分子は，各点の位置ベクトルの 1 次結合であり，係数は $\triangle$OBC の頂点のうち位置ベクトルの示す点を点Pで置き換えた三角形の面積である。例えば，点Bの位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数は $\triangle$OBC のBをPで置き換えた $\triangle$OPC の面積である。

「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の一次結合で表したいとき，例えば $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数は〔図 9〕の $\frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{OB}}$ であるが，その値は共通な底辺 OC を持つ三角形の面積の比の値 $\frac{\triangle\mathrm{OPC}}{\triangle\mathrm{OBC}}$ で与えられる」というのが，クラメルの公式であると解釈できる。



〔図 9〕

一般の場合も，分母・分子に $\frac{1}{n!}$ を掛け，三角形の代わりに n 次元の単体を登場させて同様に解釈できる。

§7. 参考事項

定理 2，定理 3 の系をあげておく。

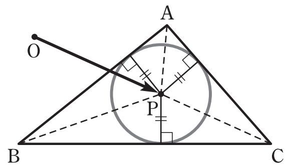
(1) 定理 2 の系

(ア)点Pが三角形の内心である場合

3 つの三角形の高さはみな内接円の半径に一致するから

$$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{APC}:\triangle\mathrm{ABP}=\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{BC}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\mathrm{CA}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\mathrm{AB}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB}}$



〔図10〕

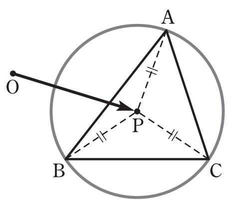
(イ)点Pが三角形の外心である場合

中心角は円周角の 2 倍であるから，外接円の半径を R とすると

$$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{APC}:\triangle\mathrm{ABP}$$
$$=\frac{1}{2}R^2\sin 2A:\frac{1}{2}R^2\sin 2B:\frac{1}{2}R^2\sin 2C$$
$$=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\sin 2A\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$



〔図11〕

(ウ)点Pが三角形の垂心である場合

$\triangle APC : \triangle ABP = A'C : BA'$

$= \dfrac{AA'}{\tan C} : \dfrac{AA'}{\tan B} = \tan B : \tan C$

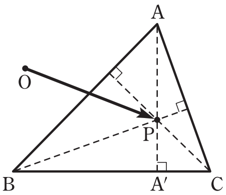
よって

$\triangle PBC : \triangle APC : \triangle ABP$

$= \tan A : \tan B : \tan C$

したがって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\tan A \cdot \overrightarrow{OA} + \tan B \cdot \overrightarrow{OB} + \tan C \cdot \overrightarrow{OC}}{\tan A + \tan B + \tan C}$$



〔図12〕

(エ)点Pが三角形の傍心である場合

3つの三角形の高さはみな傍接円の半径に一致するから，面積の符号を正として

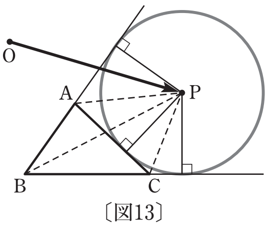
$\triangle PBC : \triangle APC : \triangle ABP = BC : CA : AB$

ただし，内心の場合と異なり，3つの三角形のうちひとつは裏返しなので

$$\overrightarrow{OP_1} = \frac{BC \cdot \overrightarrow{OA} - CA \cdot \overrightarrow{OB} + AB \cdot \overrightarrow{OC}}{BC - CA + AB}$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \frac{BC \cdot \overrightarrow{OA} + CA \cdot \overrightarrow{OB} - AB \cdot \overrightarrow{OC}}{BC + CA - AB}$$

$$\overrightarrow{OP_3} = \frac{-BC \cdot \overrightarrow{OA} + CA \cdot \overrightarrow{OB} + AB \cdot \overrightarrow{OC}}{-BC + CA + AB}$$



〔図13〕

(オ)ベクトルの問題より

> 平面上の $\triangle ABC$ と点Pについて
>
> $3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ …(53)
>
> ならば，点Pは
>
> $\triangle PBC : \triangle APC : \triangle ABP = 3 : 4 : 5$
>
> であるような位置にある。

【証明】

$\triangle P'BC : \triangle AP'C : \triangle ABP' = 3 : 4 : 5$ …(54)

である点P′をとると

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{\triangle P'BC \cdot \overrightarrow{OA} + \triangle AP'C \cdot \overrightarrow{OB} + \triangle ABP' \cdot \overrightarrow{OC}}{\triangle ABC}$$

点Oを点Pにとると

$$\overrightarrow{PP'} = \frac{\triangle P'BC \cdot \overrightarrow{PA} + \triangle AP'C \cdot \overrightarrow{PB} + \triangle ABP' \cdot \overrightarrow{PC}}{\triangle ABC}$$

(54)より $= \dfrac{k(3\overrightarrow{AP} + 4\overrightarrow{BP} + 5\overrightarrow{CP})}{\triangle ABC} = \vec{0}$

よって，点Pは点P′と一致し，結論の成立が示された。（終わり）

（参考） (54)のような点は，

線分BA を 3：4 に分ける点C′ と

線分CB を 4：5 に分ける点A′ をとり

直線CC′ と直線AA′ の交点を P′ とすることでとれる。このとき，

$\triangle P'BC : \triangle AP'C = 3 : 4$

$\triangle AP'C : \triangle ABP' = 4 : 5$　となる。

(2)　定理3の系

(ア)点Pが三角錐の内心である場合

4つの小さな三角錐の高さはみな内接球の半径に一致するから

$|PBCD| : |APCD| : |ABPD| : |ABCP|$

$= \triangle BCD : \triangle CDA : \triangle DBA : \triangle ABC$

したがって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\triangle BCD \cdot \overrightarrow{OA} + \triangle CDA \cdot \overrightarrow{OB} + \triangle DBA \cdot \overrightarrow{OC} + \triangle ABC \cdot \overrightarrow{OD}}{\triangle BCD + \triangle CDA + \triangle DBA + \triangle ABC}$$

(イ)点Pが三角錐の傍心である場合

4つの小さな三角錘の高さはみな傍接球の半径に一致するから，符号を正にとって

$|PBCD| : |APCD| : |ABPD| : |ABCP|$

$= \triangle BCD : \triangle CDA : \triangle DBA : \triangle ABC$

三角形の場合と同様に

$$\overrightarrow{OP_1} = \frac{-\triangle BCD \cdot \overrightarrow{OA} + \triangle CDA \cdot \overrightarrow{OB} + \triangle DBA \cdot \overrightarrow{OC} + \triangle ABC \cdot \overrightarrow{OD}}{-\triangle BCD + \triangle CDA + \triangle DBA + \triangle ABC}$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \frac{\triangle BCD \cdot \overrightarrow{OA} - \triangle CDA \cdot \overrightarrow{OB} + \triangle DBA \cdot \overrightarrow{OC} + \triangle ABC \cdot \overrightarrow{OD}}{\triangle BCD - \triangle CDA + \triangle DBA + \triangle ABC}$$

$$\overrightarrow{OP_3} = \frac{\triangle BCD \cdot \overrightarrow{OA} + \triangle CDA \cdot \overrightarrow{OB} - \triangle DBA \cdot \overrightarrow{OC} + \triangle ABC \cdot \overrightarrow{OD}}{\triangle BCD + \triangle CDA - \triangle DBA + \triangle ABC}$$

$$\overrightarrow{OP_4} = \frac{\triangle BCD \cdot \overrightarrow{OA} + \triangle CDA \cdot \overrightarrow{OB} + \triangle DBA \cdot \overrightarrow{OC} - \triangle ABC \cdot \overrightarrow{OD}}{\triangle BCD + \triangle CDA + \triangle DBA - \triangle ABC}$$

の形で，4つの傍心の位置ベクトルが表される。

（岡山県立岡山朝日高等学校）