

内分点・外分点の位置ベクトルの公式の一般化

うちだ やすはる
内田 康晴

§1. はじめに

「四面体に内心は必ずあるのか？」という前任校の同僚のつぶやきをきっかけに、空間内の点の位置ベクトルについて考察した。その結果「内分点・外分点の位置ベクトルの公式」が、多次元に一般化できることがわかった。高校数学でよく用いる公式の拡張であるので、報告させていただくことにした。

線分とその上の点である内分点Pの位置ベクトルの公式に対し、線分を三角形に置き換えて、三角形とその内部にある点Pの位置ベクトルに対しても、同様な公式が成り立つ。

さらに、この公式について、次のような一般化、多次元化が可能であることを示す。

【一般化1】 平面上で、点Pが三角形の外部にあっても公式はそのまま成り立つ。ただし、「裏返った三角形の面積は負」とする。

【一般化2】 空間内で、三角錐と点Pの位置ベクトルについても同様な公式が成り立つ。

【一般化3】 一般の次元のユークリッド空間で、 n 次元の三角錐(単体と呼ばれる)と、点Pの位置ベクトルについても同様な公式が成り立つ。

そしてまた、連立方程式の解に関する「クラメルの公式」は、本質的には「拡張された分点の位置ベクトル公式」として図形的な解釈ができることを指摘する。

§2. 線分の分点の位置ベクトルの公式と

その特徴

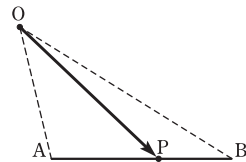
一般化の準備として、線分の分点の位置ベクトルの公式を確認しておきたい。

【定理1】 (線分の分点の位置ベクトル)

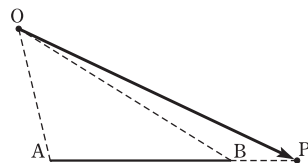
直線 AB 上の点Pについて

$$\vec{OP} = \frac{PB \cdot \vec{OA} + AP \cdot \vec{OB}}{PB + AP} \quad \dots(1)$$

$$= \frac{PB \cdot \vec{OA} + AP \cdot \vec{OB}}{AB} \quad \dots(2)$$



〔図1〕



〔図2〕

ただし、線分の長さAP, PBは向きも考えて正負の符号をつける。

点Pが、線分ABの内分点のときは同符号、外分点のときは異符号である。

【定理1の式の特徴】

(1)の式の分子は、掛け方が「互い違い」である点の特徴である。つまり、点Bから(点Pまで)の距離PBを点Aの位置ベクトル \vec{OA} に掛け、点Aから(点Pまで)の距離APを点Bの位置ベクトル \vec{OB} に掛けてある。そして、分母はPBとAPの和であり、これは線分ABの長さになっている。

この特徴を、記号の規則性に注目して述べれば、「分母のABのAをPで置き換えたPBが点Aの位置ベクトル \vec{OA} の係数であり、分母のABのBをPで置き換えたAPが点Bの位置ベクトル \vec{OB} の係数になっている。」

この特徴は、一般化された分点公式でもそのまま成り立つ。

§3. 三角形の分点の位置ベクトルの公式

三角形 ABC と内部の点 P についても、定理 1 と類似の定理 2 が成り立つ。

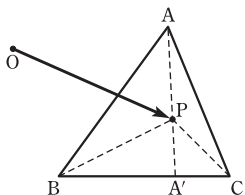
以後の拡張した公式も、定理 2 をひな形に考えることができるので、特にそれを意識して公式の形の特徴と証明を確認しておく。

【定理 2】 (三角形の分点の位置ベクトル)

平面上で三角形 ABC の内部の点 P について

$$\vec{OP} = \frac{\triangle PBC \cdot \vec{OA} + \triangle APC \cdot \vec{OB} + \triangle ABP \cdot \vec{OC}}{\triangle PBC + \triangle APC + \triangle ABP} \quad \dots(3)$$

$$= \frac{\triangle PBC \cdot \vec{OA} + \triangle APC \cdot \vec{OB} + \triangle ABP \cdot \vec{OC}}{\triangle ABC} \quad \dots(4)$$



〔図 3〕

【定理 2 の式の特徴】

定理 2 の式(4)は、次のように定理 1 と同様の特徴を持っている。すなわち、「分母の $\triangle ABC$ の A を P に置き換えた $\triangle PBC$ が、点 A の位置ベクトル \vec{OA} の係数になっている。点 B, C についても同様である。」

$\triangle ABC$ は、点 P によって 3 つの小さな三角形に分けられている。(4)の分子においては、各頂点の位置ベクトルに対して、その対極にある小さな三角形の面積が係数としてかけられている。これは、ある意味「互い違い」になっているといえる。

【定理 2 の(3)の証明】

直線 AP と直線 BC との交点を点 A' とする。

〔図 3〕

次の補題 1, 補題 2 が成り立つ。

【補題 1】 $\triangle ABP : \triangle APC = BA' : A'C \quad \dots(21)$

(証明略)

【補題 2】 $(\triangle ABP + \triangle APC) : \triangle PBC = AP : PA' \quad \dots(22)$

(証明略)

これらの補題を用いて、定理 2 を証明する。

定理 1 から

$$\vec{OA'} = \frac{A'C \cdot \vec{OB} + BA' \cdot \vec{OC}}{A'C + BA'}$$

補題 1 から

$$= \frac{\triangle APC \cdot \vec{OB} + \triangle ABP \cdot \vec{OC}}{\triangle APC + \triangle ABP} \quad \dots(23)$$

ここでまた定理 1 から

$$\vec{OP} = \frac{PA' \cdot \vec{OA} + AP \cdot \vec{OA'}}{PA' + AP}$$

補題 2 から

$$= \frac{\triangle PBC \cdot \vec{OA} + (\triangle ABP + \triangle APC) \cdot \vec{OA'}}{\triangle PBC + (\triangle ABP + \triangle APC)}$$

(23)を代入して

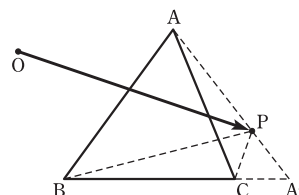
$$= \frac{\triangle PBC \cdot \vec{OA} + \triangle APC \cdot \vec{OB} + \triangle ABP \cdot \vec{OC}}{\triangle PBC + \triangle APC + \triangle ABP} \quad \dots(24)$$

(定理 2 の(3)の証明終わり)

【定理 2'】

点 P が三角形の外側や周上にある場合を含めて定理 2 の(3), (4)は成り立つ。

ただし、「裏返った三角形の面積は負」とする。



〔図 4〕

【定理 2' の証明】 「裏返った三角形の面積は負」とすれば、基本的に定理 2 の証明がそのまま定理 2' の証明になる。

定理 2 では内分点であった点 P や点 A' が、定理 2' では、ときには外分点になる場合もある。

ただし、次の場合には、出発点となる点 A' がとれないなど、定理 2 の証明が当てはまらない。

(ア) 点 P が三角形 ABC のいずれかの頂点と一致しているとき

(イ) $AP \parallel BC$ で、直線 AP と直線 BC が交わらないとき

しかし、(ア)のときは、(3), (4)は明らかに成り立つ。また、(イ)のときは、「直線 AP と直線 BC の交点 A'」の代わりに「直線 BP と直線 CA の交点 B'」を考えて、同様に議論すればよい。さらに $BP \parallel CA$ で交点 B' も存在しないときは、四角形 PBCA が平行四

辺形るときであるから、CPとABはその平行四辺形の対角線となり必ず交点C'がとれ、これについて同様に考えればよい。

§4. 三角錐の分点の位置ベクトルの公式

さらに、定理2の三角形ABCの代わりに三角錐ABCDを考えた定理3が成り立つ。

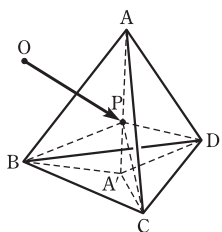
証明も、定理2の証明と同様である。

【定理3】 (三角錐の分点の位置ベクトル)

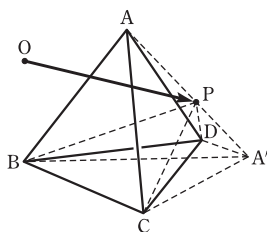
三角錐ABCDを含む3次元空間ABCD内の点Pについて

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \frac{|PBCD| \cdot \vec{OA} + |APCD| \cdot \vec{OB} + |ABPD| \cdot \vec{OC} + |ABCP| \cdot \vec{OD}}{|PBCD| + |APCD| + |ABPD| + |ABCP|} \quad \dots(5) \end{aligned}$$

$$= \frac{|PBCD| \cdot \vec{OA} + |APCD| \cdot \vec{OB} + |ABPD| \cdot \vec{OC} + |ABCP| \cdot \vec{OD}}{|ABCD|} \quad \dots(6)$$



【図5】



【図6】

ここで、例えば記号|PBCD|は、三角錐PBCDの体積を表すものとする。ただし、体積は正負の符号付きで考え、点Pが四面体ABCDの内部にあるときはすべて正とし、点Pが四面体ABCDの外部に移動したときは、裏返った三角錐(頂点Pが、各底面を延長した平面)を通り抜けて反対側へ移動したもの)の体積は負とする。

【定理3の(5)の証明】

点Pが、三角錐ABCDのいずれかの頂点と重なるときは、明らかに(5)並びに(6)が成立する。よって、点Pは点A, B, C, Dのいずれとも一致しない場合を考える。

直線APと平面BCDとの交点を点A'とする。(【図5】【図6】: 定理2'のときと同様に、同じように決めるB', C', D'の少なくともひとつは必ず存在するので、それについて同様の議論ができる。)

次の補題3, 補題4が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{【補題3】 } |APCD| : |ABPD| : |ABCP| &= \triangle A'CD : \triangle BA'D : \triangle BCA' \quad \dots(31) \end{aligned}$$

【証明】 高さの等しい三角錐の体積比は、底面積の比であることから

$$|AA'CD| : |ABA'D| : |ABCA'| = \triangle A'CD : \triangle BA'D : \triangle BCA' \quad \dots(32)$$

$$|PA'CD| : |PBA'D| : |PBCA'| = \triangle A'CD : \triangle BA'D : \triangle BCA' \quad \dots(33)$$

(32), (33)の左辺の対応する三角錐を差し引きしたものが、(31)の左辺の対応する三角錐であるから、補題1の証明と同様に「加比の理」(「減比の理」?)により(31)が導かれる。(補題3の証明終わり)

【補題4】

$$\begin{aligned} (|APCD| + |ABPD| + |ABCP|) : |PBCD| &= AP : PA' \quad \dots(34) \end{aligned}$$

【証明】 底面の共通な三角錐の体積比は、高さの比に等しいから

$$|AA'CD| : |PA'CD| = AA' : PA'$$

したがって

$$\begin{aligned} (|AA'CD| - |PA'CD|) : |PA'CD| &= (AA' - PA') : PA' \end{aligned}$$

$$\text{つまり } |APCD| : |PA'CD| = AP : PA'$$

$$\text{同様にして } |APDB| : |PA'DB| = AP : PA'$$

$$|APBC| : |PA'BC| = AP : PA'$$

これら3つの式から加比の理により(34)が得られる。

(補題4の証明の終わり)

これらの補題を用いて定理3を証明する。

まず、定理2より

$$\vec{OA'} = \frac{\triangle A'CD \cdot \vec{OB} + \triangle BA'D \cdot \vec{OC} + \triangle BCA' \cdot \vec{OD}}{\triangle A'CD + \triangle BA'D + \triangle BCA'}$$

補題3から

$$= \frac{|APCD| \cdot \vec{OB} + |ABPD| \cdot \vec{OC} + |ABCP| \cdot \vec{OD}}{|APCD| + |ABPD| + |ABCP|} \quad \dots(35)$$

一方、補題1から

$$\vec{OP} = \frac{PA' \cdot \vec{OA'} + AP \cdot \vec{OA}}{PA' + AP}$$

補題4から

$$= \frac{|PBCD| \cdot \vec{OA} + (|APCD| + |ABPD| + |ABCP|) \cdot \vec{OA'}}{|PBCD| + (|APCD| + |ABPD| + |ABCP|)} \quad \dots(36)$$

(35)を代入して

$$= \frac{|PBCD| \cdot |\vec{OA}| + |APCD| \cdot |\vec{OB}| + |ABPD| \cdot |\vec{OC}| + |ABCP| \cdot |\vec{OD}|}{|PBCD| + |APCD| + |ABPD| + |ABCP|} \quad \dots(37)$$

(定理3の(5)の証明終わり)

§5. 分点の一般公式

定理1から定理3は一連のものであり、次元を上げても一般的に成り立つことが推測される。証明についても同様にできるとも言えそうである。ただ、図のパターンが多岐にわたり、「同様に」ですませてよいか躊躇する面もある。

ところが、以下のように考えることで、定理の一般形とその証明がよりすっきりとした形で得られる。

定理2で、右辺に登場するベクトルを1次独立なものにするために、基準にする点Oを $O=A$ となるようにとると、(4)は、

$$\vec{OP} = \frac{\triangle PBC \cdot \vec{OO} + \triangle OPC \cdot \vec{OB} + \triangle OBP \cdot \vec{OC}}{\triangle OBC} \quad \dots(41)$$

$$= \frac{\triangle OPC \cdot \vec{OB} + \triangle OBP \cdot \vec{OC}}{\triangle OBC} \quad \dots(42)$$

また、三角形の面積は、縦ベクトルを第1列、第2列に並べて作った行列の行列式で表されるから

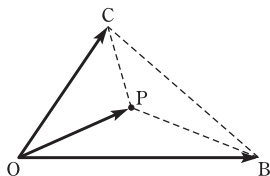
$$\triangle OBC = \frac{1}{2} |\vec{OB} \ \vec{OC}| \quad \dots(43)$$

のようになる。この表し方は、「裏返ると、符号は負」にも対応している。

このことを用いて(5)を書き換え、係数 $\frac{1}{2}$ も約せば次の定理4が得られる。

【定理4】 三角形OBCを含む平面OBC上の点Pについて

$$\vec{OP} = \frac{|\vec{OP} \ \vec{OC}| \cdot \vec{OB} + |\vec{OB} \ \vec{OP}| \cdot \vec{OC}}{|\vec{OB} \ \vec{OC}|} \quad \dots(7)$$



【図7】

この定理4の形から、定理の一般形が見えてくる。そこで登場する n 次元の三角錐は、 n 次元単体と呼ばれる。 $n+1$ 個の点 A_1, A_2, \dots, A_{n+1} が n 次元単体を作るとき、 n 個の縦ベクトル $\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3},$

$\dots, \vec{A_1A_{n+1}}$ は1次独立である。

【定理5】 n 次元ユークリッド空間に、 n 次元単体を作る $n+1$ 個の点 O, A_1, A_2, \dots, A_n があるとき、空間内の任意の点Pの位置ベクトルについて

$$\vec{OP} = \frac{\sum_{k=1}^n |\vec{OA}_1 \ \dots \ \vec{OA}_{k-1} \ \vec{OP} \ \vec{OA}_{k+1} \ \dots \ \vec{OA}_n| \vec{OA}_k}{|\vec{OA}_1 \ \vec{OA}_2 \ \dots \ \vec{OA}_n|} \quad \dots(8)$$

ただし、 $|\vec{OA}_1 \ \vec{OA}_2 \ \dots \ \vec{OA}_n|$ 等は、記号 $|\ \ |$ の中の縦ベクトルが作る n 次正方行列の行列式である。この定理は、クラメルの公式から直ちに得られる。(クラメルの公式そのものである。)

【定理5の証明】

係数行列が正則な n 元1次連立方程式 $x_1 \vec{OA}_1 + x_2 \vec{OA}_2 + \dots + x_k \vec{OA}_k + \dots + x_n \vec{OA}_n = \vec{OP}$... (51)

すなわち

$$(\vec{OA}_1 \ \vec{OA}_2 \ \dots \ \vec{OA}_k \ \dots \ \vec{OA}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{OP}$$

の解は、クラメルの公式より

$$x_k = \frac{|\vec{OA}_1 \ \dots \ \vec{OA}_{k-1} \ \vec{OP} \ \vec{OA}_{k+1} \ \dots \ \vec{OA}_n|}{|\vec{OA}_1 \ \vec{OA}_2 \ \dots \ \vec{OA}_n|} \quad \dots(52)$$

(52)を(51)に代入すると(11)が得られる。

(定理5の証明終わり)

ここで、 n 次元単体 $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ の体積を $|A_1A_2 \dots A_{n+1}|$ で表すと、

$$|A_1A_2 \dots A_{n+1}| = \frac{1}{n!} |\vec{A_1A_2} \ \vec{A_1A_3} \ \dots \ \vec{A_nA_{n+1}}|$$

である。

例えば、三角形の場合、面積は同じ底辺と高さを持つ平行四辺形の面積の $\frac{1}{2}$ であり

$$|A_1A_2A_3| = \frac{1}{2!} |\vec{A_1A_2} \ \vec{A_1A_3}|$$

3次元の三角錐の場合、体積は同じベクトルで決まる平行六面体の体積の $\frac{1}{6}$ であり(底面が三角形であるから底面積は $\frac{1}{2}$ 、錐であるから体積は柱の

$\frac{1}{3}$ なので、結局 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3!}$ 倍)

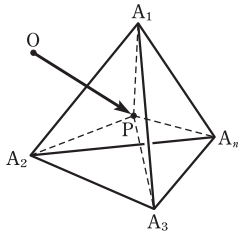
$$|A_1 A_2 A_3 A_4| = \frac{1}{3!} |\overrightarrow{A_1 A_2} \overrightarrow{A_1 A_3} \overrightarrow{A_1 A_4}|$$

このことを用いると n 次元の場合についての定理6が得られる。

【定理6】 n を自然数とする。 n 次元ユークリッド空間に、 n 次元の単体 $A_1 A_2 \cdots A_{n+1}$ があるとき、 n 次元ユークリッド空間 $A_1 A_2 \cdots A_{n+1}$ 内の任意の点Pの位置ベクトルについて

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} |A_1 \cdots A_{k-1} P A_{k+1} \cdots A_{n+1}| \overrightarrow{OA_k}}{|A_1 A_2 \cdots A_{n+1}|} \quad \dots(9)$$

ただし、 $|A_1 A_2 \cdots A_{n+1}|$ 等は、 $| \quad |$ の中の点の作る n 次元単体の体積を表す。



〔図8〕

(証明略)

正確な定理1の n 次元版は、「より高次元の $m (\geq n)$ 次元ユークリッド空間中に、 n 次元の単体がある中で(9)が成立する。」ことである。これも、定理6の証明とほとんど同じである。

§6. クラメルの公式の図形的解釈

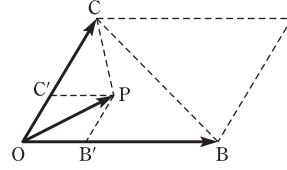
クラメルの公式は、2次元の場合(7)である。これは、分母・分子にそれぞれ係数 $\frac{1}{2}$ を掛けることで、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\triangle OPC \cdot \overrightarrow{OB} + \triangle OBP \cdot \overrightarrow{OC}}{\triangle OBC} \quad \dots(42)$$

を意味する。(〔図7〕)分母は全体の $\triangle OBC$ の面積である。分子は、各点の位置ベクトルの1次結合であり、係数は $\triangle OBC$ の頂点のうち位置ベクトルの示す点を点Pで置き換えた三角形の面積である。例えば、点Bの位置ベクトル \overrightarrow{OB} の係数は $\triangle OBC$ のBをPで置き換えた $\triangle OPC$ の面積である。

「 \overrightarrow{OP} を \overrightarrow{OB} と \overrightarrow{OC} の一次結合で表したいとき、例えば \overrightarrow{OB} の係数は〔図9〕の $\frac{OB'}{OB}$ であるが、その値は共通な底辺 OC を持つ三角形の面積の比の値

$\frac{\triangle OPC}{\triangle OBC}$ で与えられる」というのが、クラメルの公式であると解釈できる。



〔図9〕

一般の場合も、分母・分子に $\frac{1}{n!}$ を掛け、三角形の代わりに n 次元の単体を登場させて同様に解釈できる。

§7. 参考事項

定理2、定理3の系をあげておく。

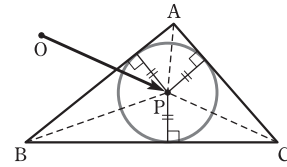
(1) 定理2の系

(ア)点Pが三角形の内心である場合

3つの三角形の高さはみな内接円の半径に一致するから

$$\triangle PBC : \triangle APC : \triangle ABP = BC : CA : AB$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OP} = \frac{BC \cdot \overrightarrow{OA} + CA \cdot \overrightarrow{OB} + AB \cdot \overrightarrow{OC}}{BC + CA + AB}$$



〔図10〕

(イ)点Pが三角形の外心である場合

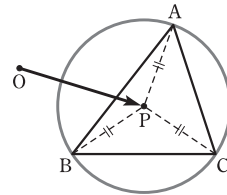
中心角は円周角の2倍であるから、外接円の半径を R とすると

$$\begin{aligned} \triangle PBC : \triangle APC : \triangle ABP \\ = \frac{1}{2} R^2 \sin 2A : \frac{1}{2} R^2 \sin 2B : \frac{1}{2} R^2 \sin 2C \end{aligned}$$

$$= \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$$

であるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$$



〔図11〕

(ウ)点Pが三角形の垂心である場合

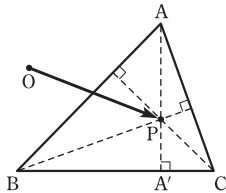
$$\begin{aligned} \triangle APC : \triangle ABP &= A'C : BA' \\ &= \frac{AA'}{\tan C} : \frac{AA'}{\tan B} = \tan B : \tan C \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \triangle PBC : \triangle APC : \triangle ABP \\ &= \tan A : \tan B : \tan C \end{aligned}$$

したがって

$$\vec{OP} = \frac{\tan A \cdot \vec{OA} + \tan B \cdot \vec{OB} + \tan C \cdot \vec{OC}}{\tan A + \tan B + \tan C}$$



[図12]

(エ)点Pが三角形の傍心である場合

3つの三角形の高さはみな傍接円の半径に一致するから、面積の符号を正として

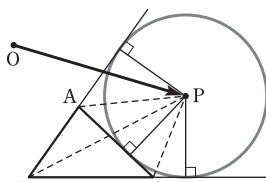
$$\triangle PBC : \triangle APC : \triangle ABP = BC : CA : AB$$

ただし、内心の場合と異なり、3つの三角形のうちひとつは裏返しなので

$$\vec{OP}_1 = \frac{BC \cdot \vec{OA} - CA \cdot \vec{OB} + AB \cdot \vec{OC}}{BC - CA + AB}$$

$$\vec{OP}_2 = \frac{BC \cdot \vec{OA} + CA \cdot \vec{OB} - AB \cdot \vec{OC}}{BC + CA - AB}$$

$$\vec{OP}_3 = \frac{-BC \cdot \vec{OA} + CA \cdot \vec{OB} + AB \cdot \vec{OC}}{-BC + CA + AB}$$



[図13]

(オ)ベクトルの問題より

平面上の△ABCと点Pについて

$$3\vec{PA} + 4\vec{PB} + 5\vec{PC} = \vec{0} \quad \dots(53)$$

ならば、点Pは

$$\triangle PBC : \triangle APC : \triangle ABP = 3 : 4 : 5$$

であるような位置にある。

[証明]

$\triangle P'BC : \triangle AP'C : \triangle ABP' = 3 : 4 : 5 \quad \dots(54)$
である点P'をとると

$$\vec{OP'} = \frac{\triangle P'BC \cdot \vec{OA} + \triangle AP'C \cdot \vec{OB} + \triangle ABP' \cdot \vec{OC}}{\triangle ABC}$$

点Oを点Pにとると

$$\vec{PP'} = \frac{\triangle P'BC \cdot \vec{PA} + \triangle AP'C \cdot \vec{PB} + \triangle ABP' \cdot \vec{PC}}{\triangle ABC}$$

$$(54)より = \frac{k(3\vec{AP} + 4\vec{BP} + 5\vec{CP})}{\triangle ABC} = \vec{0}$$

よって、点Pは点P'と一致し、結論の成立が示された。 (終わり)

(参考) 54のような点は、

線分BAを3:4に分ける点C'と

線分CBを4:5に分ける点A'をとり

直線CC'と直線AA'の交点をP'とすることでとれる。このとき、

$$\triangle P'BC : \triangle AP'C = 3 : 4$$

$$\triangle AP'C : \triangle ABP' = 4 : 5 \quad \text{となる。}$$

(2) 定理3の系

(ア)点Pが三角錐の内心である場合

4つの小さな三角錐の高さはみな内接球の半径に一致するから

$$|PBCD| : |APCD| : |ABPD| : |ABCP|$$

$$= \triangle BCD : \triangle CDA : \triangle DBA : \triangle ABC$$

したがって

$$\vec{OP} = \frac{\triangle BCD \cdot \vec{OA} + \triangle CDA \cdot \vec{OB} + \triangle DBA \cdot \vec{OC} + \triangle ABC \cdot \vec{OD}}{\triangle BCD + \triangle CDA + \triangle DBA + \triangle ABC}$$

(イ)点Pが三角錐の傍心である場合

4つの小さな三角錐の高さはみな傍接球の半径に一致するから、符号を正にとって

$$|PBCD| : |APCD| : |ABPD| : |ABCP|$$

$$= \triangle BCD : \triangle CDA : \triangle DBA : \triangle ABC$$

三角形の場合と同様に

$$\begin{aligned} \vec{OP}_1 \\ &= \frac{-\triangle BCD \cdot \vec{OA} + \triangle CDA \cdot \vec{OB} + \triangle DBA \cdot \vec{OC} + \triangle ABC \cdot \vec{OD}}{-\triangle BCD + \triangle CDA + \triangle DBA + \triangle ABC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP}_2 \\ &= \frac{\triangle BCD \cdot \vec{OA} - \triangle CDA \cdot \vec{OB} + \triangle DBA \cdot \vec{OC} + \triangle ABC \cdot \vec{OD}}{\triangle BCD - \triangle CDA + \triangle DBA + \triangle ABC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP}_3 \\ &= \frac{\triangle BCD \cdot \vec{OA} + \triangle CDA \cdot \vec{OB} - \triangle DBA \cdot \vec{OC} + \triangle ABC \cdot \vec{OD}}{\triangle BCD + \triangle CDA - \triangle DBA + \triangle ABC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP}_4 \\ &= \frac{\triangle BCD \cdot \vec{OA} + \triangle CDA \cdot \vec{OB} + \triangle DBA \cdot \vec{OC} - \triangle ABC \cdot \vec{OD}}{\triangle BCD + \triangle CDA + \triangle DBA - \triangle ABC} \end{aligned}$$

の形で、4つの傍心の位置ベクトルが表される。

(岡山県立岡山朝日高等学校)