漸化式の解法について（その２）
－一般解と特殊解を用いて－

大関（おおせき）　浩二（こうじ）

§1. はじめに

本誌のNo.63では，数列$\{a_n\}$の一般項を**「斉次式の漸化式の一般解」と「非斉次式の漸化式の特殊解」の和**で求められるという話をしました。また，隣接3項間の漸化式は，特性方程式の解が実数解の場合の解法を紹介したので，今回は**共役な虚数解**をもつときの解法について触れてみたいと思います。

§2. 隣接3項間の漸化式

隣接3項間の漸化式 $\boldsymbol{a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0}$ は特性方程式 $x^2+px+q=0$ の2つの解をα，βとすると，一般解は

$\alpha \neq \beta$ のとき $\boldsymbol{a_n=A\alpha^n+B\beta^n}$

$\alpha=\beta$ のとき $\boldsymbol{a_n=(A+Bn)\cdot\alpha^n}$

である。

【公式】

特性方程式 $x^2+px+q=0$ が共役な虚数解α，βをもつとき，$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ とすると　$a_n=r^n(A\cos n\theta+B\sin n\theta)$

【証明】　ド・モアブルの定理より

$\alpha^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ と表せる。

$\beta^n=(\overline{\alpha})^n=\overline{\alpha^n}=r^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)$ が成り立つ。

$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$

$\quad=Ar^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)+Br^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)$

$\quad=r^n\{(A+B)\cos n\theta+(A-B)i\sin n\theta\}$

ここで，$A+B$，$(A-B)i$を改めてA，Bとおくと

$a_n=r^n(A\cos n\theta+B\sin n\theta)$ 終

【例題１】　斉次式

次の漸化式で定義された数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。ただし，$n=1, 2, 3, \cdots$ とする。

(1) $a_1=-1$，$a_2=1$，
$a_{n+2}+2a_{n+1}+4a_n=0$

(2) $a_1=5$，$a_2=4$，$a_{n+2}-2a_{n+1}+2a_n=0$

【解法】

(1) $x^2+2x+4=0$ を解くと $x=-1\pm\sqrt{3}\,i$

$-1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ であるから

$$a_n=2^n\left(A\cos\frac{2n\pi}{3}+B\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$a_1=-1$，$a_2=1$ を満たすので，

$a_1=-A+\sqrt{3}B=-1$，$a_2=-2A-2\sqrt{3}B=1$

これを解くと，$A=\dfrac{1}{4}$，$B=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

したがって，

$$a_n=2^n\left(\frac{1}{4}\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$
$$=2^{n-2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

(注)　rとθを求めるには，**解と係数の関係**から，
$\alpha+\beta=2r\cos\theta=-p$，$\alpha\beta=\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=r^2=q$
を導き，これから計算した方がはやい。(1)は
$p=2$，$q=4$ であるから，$r=\sqrt{q}=2$，
$\cos\theta=-\dfrac{p}{2r}=-\dfrac{1}{2}$ がすぐに求められる。

また，$\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ と合成でき，$a_n=2^{n-1}\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{3}$ とも書ける。

(2) $x^2-2x+2=0$ を解くと $x=1\pm i$

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$a_n=(\sqrt{2})^n\left(A\cos\frac{n\pi}{4}+B\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$a_1=5$，$a_2=4$ を満たすので，

$a_1=A+B=5$，$a_2=2B=4$

これを解くと，$A=3$，$B=2$

ゆえに，$a_n=(\sqrt{2})^n\left(3\cos\dfrac{n\pi}{4}+2\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$

§3. 非斉次式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=f(n)$

【例題２】 非斉次式

次の漸化式で定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とする。

(1) $a_1=0$，$a_2=2$，$a_{n+2}+2a_{n+1}+4a_n=7$

(2) $a_1=4$，$a_2=5$，$a_{n+2}-2a_{n+1}+2a_n=2n-3$

(3) $a_1=4$，$a_2=5$，$a_{n+2}-a_{n+1}+a_n=3\cdot2^n$

(4) $a_1=1$，$a_2=-4$，
$a_{n+2}-2a_{n+1}+2a_n=(n+1)\cdot2^n$

【解法】

(1) $f(n)$ が定数の場合ですから，
$a_{n+2}+2a_{n+1}+4a_n=7$ を満たす数列を $b_n=C$ とすると，
$C+2C+4C=7$ より $C=1$ ゆえに，$b_n=1$
$a_{n+2}+2a_{n+1}+4a_n=0$ の一般解は
$c_n=2^n\left(A\cos\dfrac{2n\pi}{3}+B\sin\dfrac{2n\pi}{3}\right)$ したがって，

$$a_n=c_n+b_n=2^n\left(A\cos\frac{2n\pi}{3}+B\sin\frac{2n\pi}{3}\right)+1$$

$a_1=0$，$a_2=2$ を満たすので，

$$\begin{cases}a_1=-A+\sqrt{3}B+1=0\\ a_2=-2A-2\sqrt{3}B+1=2\end{cases}$$

これを解くと $A=\dfrac{1}{4}$，$B=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ したがって

$$a_n=2^{n-2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)+1$$
$$=2^{n-1}\cos\frac{(2n+1)\pi}{3}+1$$

(2) $f(n)$ が１次式の場合ですから，
$a_{n+2}-2a_{n+1}+2a_n=2n-3$ を満たす数列を
$\boldsymbol{b_n=Cn+D}$ とすると，
$\{C(n+2)+D\}-2\{C(n+1)+D\}+2(Cn+D)$
$=2n-3$ より $Cn+D=2n-3$
したがって $C=2$，$D=-3$ ゆえに，$b_n=2n-3$
$a_{n+2}-2a_{n+1}+2a_n=0$ の一般解は

$$c_n=(\sqrt{2})^n\left(A\cos\frac{n\pi}{4}+B\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

したがって，

$$a_n=(\sqrt{2})^n\left(A\cos\frac{n\pi}{4}+B\sin\frac{n\pi}{4}\right)+2n-3$$

$a_1=4$，$a_2=5$ を満たすので，
$a_1=A+B-1=4$，$a_2=2B+1=5$
これを解くと，$A=3$，$B=2$ ゆえに，

$$a_n=(\sqrt{2})^n\left(3\cos\frac{n\pi}{4}+2\sin\frac{n\pi}{4}\right)+2n-3$$

(3) $f(n)$ が指数関数の場合ですから，
$a_{n+2}-a_{n+1}+a_n=3\cdot2^n$ を満たす数列を
$b_n=C\cdot2^n$（C は定数）とすると，
$C\cdot2^{n+2}-C\cdot2^{n+1}+C\cdot2^n=3\cdot2^n$，$3C\cdot2^n=3\cdot2^n$
よって，$C=1$ ゆえに，$b_n=2^n$
$x^2-x+1=0$ を解くと $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるから
$a_{n+2}-a_{n+1}+a_n=0$ の一般解は

$$c_n=A\cos\frac{n\pi}{3}+B\sin\frac{n\pi}{3}$$

したがって，

$$a_n=c_n+b_n=A\cos\frac{n\pi}{3}+B\sin\frac{n\pi}{3}+2^n$$

$a_1=4$，$a_2=5$ を満たすので，

$$\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{2}A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}B+2=4\\ a_2=-\dfrac{1}{2}A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}B+4=5\end{cases}$$

これを解くと，$A=1$，$B=\sqrt{3}$ したがって，

$$a_n=\cos\frac{n\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}+2^n$$
$$=2\cos\frac{(n-1)\pi}{3}+2^n$$

(4) $f(n)$ が（１次式）×（指数関数）の場合ですから，
$\boldsymbol{b_n=(Cn+D)\cdot2^n}$ とすると，
$\{C(n+2)+D\}\cdot2^{n+2}-2\{C(n+1)+D\}\cdot2^{n+1}$
$+2(Cn+D)\cdot2^n=(n+1)\cdot2^n$
より $(2Cn+4C+2D)\cdot2^n=(n+1)\cdot2^n$
したがって，$C=\dfrac{1}{2}$，$D=-\dfrac{1}{2}$
ゆえに，$b_n=(n-1)\cdot2^{n-1}$

$$a_n=(\sqrt{2})^n\left(A\cos\frac{n\pi}{4}+B\sin\frac{n\pi}{4}\right)+(n-1)\cdot2^{n-1}$$

$a_1=1$，$a_2=-4$ を満たすので，
$a_1=A+B=1$，$a_2=2B+2=-4$
これを解くと，$A=4$，$B=-3$ ゆえに，

$$a_n=(\sqrt{2})^n\left(4\cos\frac{n\pi}{4}-3\sin\frac{n\pi}{4}\right)+(n-1)\cdot2^{n-1}$$

《参考文献》

〔１〕 高橋健人 新数学シリーズ 20 差分方程式
培風館

（新潟県立新潟江南高等学校）