等比級数の話題

松田(まつだ)　康雄(やすお)

§0. はじめに

無限等比級数は無限と向き合う教材である。本稿はこの無限等比級数に関するいくつかの話題を書いた。

§1. 等比数列の和の公式

先日，宮地俊彦先生(久留米高専)から次のような等比級数の和の公式の証明法を教えて頂いた。

$S=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}$ (nは自然数，$r\neq 1$)

とおく。

① $1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}+r^n$
$=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}+r^n$　(同じ式を書く。)

② $(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})+r^n$
$=1+r(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})$
(異なる区切り方をする。)

③ $S+r^n=1+rS$，$(1-r)S=1-r^n$
(Sを使って変形する。)

④ $S=\dfrac{1-r^n}{1-r}$　(等比数列の和の公式が得られる。)

この方法を真似て，次の級数の和を求めてみた。

$T=1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1}$
(nは自然数，$r\neq 1$)

① $r+2r^2+3r^3+\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n$
$=r+2r^2+3r^3+\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n$
(同じ式を書く。)

② $rT=T-S+nr^n$　(SとTを使って変形する。)

③ $(1-r)T=S-nr^n$，

$$T=\frac{S-nr^n}{1-r}=\frac{\frac{1-r^n}{1-r}-nr^n}{1-r}$$

(Tについてまとめる。)

④ $T=\dfrac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}$　(Tが計算できる。)

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot r^{k-1}=\frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}\quad (r\neq 1) \qquad (1)$$

§2. 無限等比級数の和の解釈

1の級数の和を使う問題に遭遇した。

> **問題**　2人でじゃんけんをして，勝負が決まるまでの回数の期待値は何か。

〔考え方1〕　2人でじゃんけんをしてどちらかが勝つ確率は $\dfrac{2}{3}$，あいこになる確率は $\dfrac{1}{3}$

勝負が決まるまでの回数の期待値は，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ となる。

〔考え方2〕　一方，2人でじゃんけんをしてどちらかが勝つ確率は $\dfrac{2}{3}$ なので，求める期待値はその逆の $\dfrac{3}{2}$ (回) と考えられる。

2つの考え方から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{2}$ 一般化して

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1-r)r^{n-1}=\frac{1}{1-r}$ から

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}=\frac{1}{(1-r)^2} \qquad (2)$$

が成り立つ。実際(1)において，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)r^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^{n+1}=0$ なので，(2)が成り立つ。

§3. 並びのきれいな循環小数

先日，ある生徒が

$$\frac{10}{81}=0.12345679\cdots \qquad (3)$$

と，きれいに数が並ぶが8だけがない小数の計算をした，と言ってきた。

この生徒に(3)をテーマに課題研究させたところ，次のような結論を得た。

先ず，0.1234567…から，この小数は(2)に $r=\dfrac{1}{10}$

を代入した分数と関係があると予想される。実際，(2)に $r=\dfrac{1}{10}$ を代入し $\dfrac{1}{10}$ 倍することによって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}=\frac{\frac{1}{10}}{\left(1-\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{10}{81}$$

となる。したがって，(3)では8がないわけでなく，右の計算のように繰り上がりがあって8が消えていることが分かる。

$$\begin{array}{r} 8000 \\ 900 \\ 100 \\ +\quad 11 \\ \hline 9011 \end{array}$$

その生徒は，さらに一般化した。

> **定理**　小数の並び $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ が，初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ であるような分数は $\dfrac{9a+d}{81}$ で与えられる。

(3)は $a=d=1$ の場合である。また，$a=1$，$d=2$ とすると，小数の数の並びは奇数になる。ただし繰り上がりがあるので

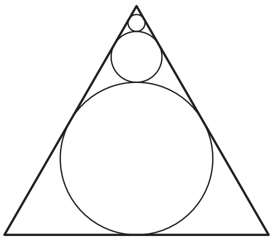
$$\frac{11}{81}=0.135802469\cdots$$

となる。

§4. 無限等比級数となる図形の面積の和

無限等比級数の問題を図形的に考えてみる。

> **問題**　1辺の長さが1の正三角形に図のように内接する円の面積の総和を求めよ。



〔**略解**〕　内接円の半径を r とすると，1辺の長さが1の正三角形の面積に関して

$$\frac{r}{2}(1+1+1)=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin60^\circ,$$

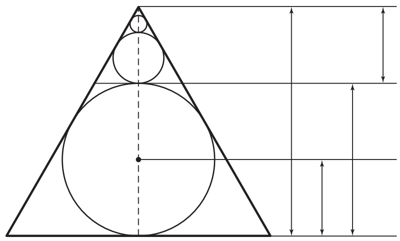
$$\frac{3}{2}r=\frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{より}\ r=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

この内接円の面積は $\dfrac{\pi}{12}$

2番目の円が内接する正三角形の高さは

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times2=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ なので2つの正三角形の相似比は $\dfrac{1}{3}$ である。以下この繰り返しなので，円の面積の総和は初項 $\dfrac{\pi}{12}$，公比 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$ の無限等比級数となる。和は収束して $\dfrac{\frac{\pi}{12}}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{3}{32}\pi$ ■

この問題を図形的に考えてみた。



①　1辺の長さが1の正三角形の高さを h とすると

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

②　正三角形の内心は重心でもあるので，この長さは $\dfrac{1}{3}h=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

内接円の面積は $\dfrac{\pi}{12}$

③　内接円の直径なので $\dfrac{2}{3}h$

④　上の三角形の高さは $\dfrac{1}{3}h$

正三角形から上の三角形を除いた台形の面積は，正三角形の面積の

$$1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}\ (\text{倍})$$

である。台形とそれに内接する円の比は等しく，この台形を次々と無限にたしていくと正三角形になる。それにともなって，台形に内接する円の総和と内接円の面積の比は，正三角形と最初の台形の面積の比に等しい。したがって，求める円の面積の総和は

$$\frac{\pi}{12}\times\frac{9}{8}=\frac{3}{32}\pi$$

となる。

§5. おわりに

無限等比級数は無限と向き合うとともに様々な見方ができる教材だと感じられる。さらなる教材化を考えていきたい。

（福岡県　明治学園中学高等学校）