極座標における回転体の体積の公式について

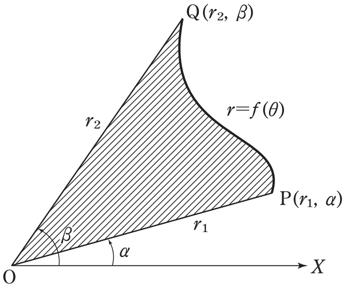
柳田（やなぎだ）　五夫（いつお）

§1. はじめに

曲線が極座標で表されている場合，図１の斜線部分の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

で求めることができる。それでは，斜線部分を始線



〔図１〕

のまわりに１回転して得られる立体の体積の公式はどのような式になるのか考察してみたい。

§2. 準備

まず，次のことに注意しておく。

$$V(\theta+\varDelta\theta)=V(\theta)+\varDelta\theta g(\theta)+o(\varDelta\theta)$$

$$\lim_{\varDelta\theta\to 0}\frac{o(\varDelta\theta)}{\varDelta\theta}=0$$

ならば $\dfrac{dV}{d\theta}=g(\theta)$ が成り立つ。

なぜならば

$$\lim_{\varDelta\theta\to 0}\frac{V(\theta+\varDelta\theta)-V(\theta)}{\varDelta\theta}=\lim_{\varDelta\theta\to 0}\left\{g(\theta)+\frac{o(\varDelta\theta)}{\varDelta\theta}\right\}$$
$$=g(\theta)$$

となるからである。

このことから，$\varDelta\theta$ の１次近似

$$V(\theta+\varDelta\theta)\fallingdotseq V(\theta)+\varDelta\theta g(\theta)$$

が求まれば，

$\dfrac{dV}{d\theta}=g(\theta)$ がいえることになる。

なぜならば，$A_m(\varDelta\theta)^m$ $(m\geqq 2)$ の項は

$$\frac{A_m(\varDelta\theta)^m}{\varDelta\theta}=A_m(\varDelta\theta)^{m-1}\to 0\ (\varDelta\theta\to 0)$$

となることから，$o(\varDelta\theta)$ に含まれるからである。

次に積分計算で必要となるものをあげておく。

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)+C$$

$$\int(\sqrt{x^2+A})^3dx=\frac{x}{4}(\sqrt{x^2+A})^3$$
$$+\frac{3}{8}A\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)+C$$

$\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+A}}$ であるから

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C_1 \qquad \cdots\cdots①$$

これを用いると

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\int x'\sqrt{x^2+A}\,dx$$
$$=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}dx$$
$$=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}}dx$$
$$=x\sqrt{x^2+A}-\int\sqrt{x^2+A}\,dx$$
$$+A\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$$

が成り立つから，①を用いると

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)+C_2 \quad \cdots②$$

同様にして

$$\int(x^2+A)^{\frac{3}{2}}dx=\int x'(x^2+A)^{\frac{3}{2}}dx$$
$$=x(x^2+A)^{\frac{3}{2}}-3\int x^2(x^2+A)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=x(x^2+A)^{\frac{3}{2}}-3\int(x^2+A)^{\frac{3}{2}}+3A\int(x^2+A)^{\frac{1}{2}}dx$$

から

$$\int(x^2+A)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{4}x(x^2+A)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}A\int(x^2+A)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{x}{4}(\sqrt{x^2+A})^3$$

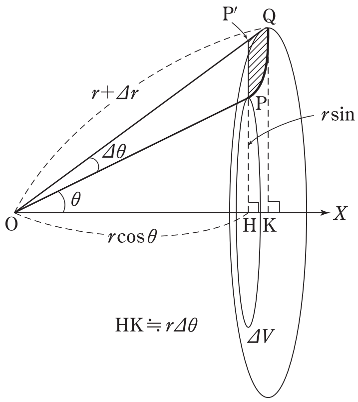
$$+\frac{3}{8}A(x\sqrt{x^2+A}+A\log|x+\sqrt{x^2+A}|)+C_3 \quad \cdots\cdots③$$

を得る。

§3. 始線のまわりに１回転して得られる立体の体積

図１の斜線部分を始線のまわりに１回転して得られる立体の体積 V を求めることを考える。

$\theta=\alpha$ と $\theta=\theta$, $r=f(\theta)$ で囲まれた部分を始線のまわりに１回転して得られる立体の体積を $V(\theta)$ とする。θ が $\Delta\theta$ 変化すると



$$\mathrm{P'H}=\mathrm{OH}\tan(\theta+\Delta\theta)$$

$$\fallingdotseq r\cos\theta\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}\Delta\theta\right)$$

$$=r\left(\sin\theta+\frac{\Delta\theta}{\cos\theta}\right)$$

で，上図の斜線部$\left(\text{これは }\Delta\theta\text{ を }\frac{1}{2}\text{ 倍すると面積がほぼ }\frac{1}{4}\text{ 倍されるから，}(\Delta\theta)^2\text{ に比例する量}\right)$を引いても１次近似としては同じ式なので

$$\Delta V\fallingdotseq\frac{1}{3}\pi r^2\left(\sin\theta+\frac{\Delta\theta}{\cos\theta}\right)^2\cdot r\cos\theta$$

$$-\frac{1}{3}\pi(r\sin\theta)^2r\cos\theta$$

$$=\frac{\pi}{3}r^2\cdot\frac{2\sin\theta\Delta\theta}{\cos\theta}\cdot r\cos\theta$$

$$+\frac{\pi}{3}r^2\frac{(\Delta\theta)^2}{\cos^2\theta}\cdot r\cos\theta$$

$$\fallingdotseq\frac{2}{3}\pi r^3\sin\theta\Delta\theta \quad \cdots\cdots④$$

よって，

$$\frac{dV}{d\theta}=\frac{2}{3}\pi r^3\sin\theta$$

となるから

$$\boldsymbol{V=\int_\alpha^\beta\frac{2}{3}\pi r^3\sin\theta d\theta} \quad \cdots\cdots⑤$$

を得る。

§4. 具体的な例

大学入試に出題されているものを見ていく。

> xy 平面上で原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式
>
> $r=2+\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$
>
> により表される曲線を C とする。C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに１回転して得られる立体の体積を求めよ。〔09 京都大〕

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^\pi r^3\sin\theta d\theta$$

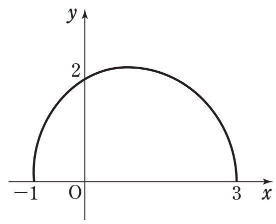
$$=\frac{2}{3}\pi\int_0^\pi(2+\cos\theta)^3\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_3^1u^3(-du) \quad [2+\cos\theta=u]$$

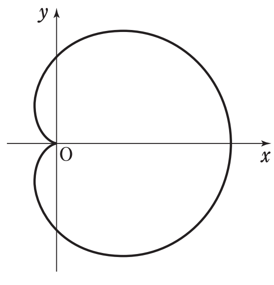
$$=\frac{2}{3}\pi\int_1^3u^3du$$

$$=\frac{2}{3}\pi\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^3$$

$$=\frac{40}{3}\pi$$



> xy 平面において，媒介変数 t $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ によって
>
> $x=2(1+\cos t)\cos t$,
>
> $y=2(1+\cos t)\sin t$
>
> と表される曲線で囲まれる図形を x 軸の周りに１回転してできる立体の体積を求めよ。
>
> 〔11 名古屋市大・芸術工 改題〕



曲線は

$$r=2(1+\cos\theta)\ \ (0\leqq\theta\leqq2\pi)$$

となるから

$$\begin{aligned}V&=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}r^3\sin\theta\,d\theta\\&=\frac{16}{3}\pi\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta\\&=\frac{16}{3}\pi\left[-\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\right]_0^{\pi}\\&=\frac{64}{3}\pi\end{aligned}$$

§5. その他の例

> 曲線 $r^2=a^2\cos2\theta$ を始線のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。$a>0$ とする。

曲線はレムニスケートで $r=a\sqrt{\cos2\theta}$

求める体積 V は⑤を使うと

$$\begin{aligned}V&=2\times\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^3\sin\theta\,d\theta\\&=\frac{4}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos2\theta)^{\frac{3}{2}}\sin\theta\,d\theta\\&=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-1)^{\frac{3}{2}}\sin\theta\,d\theta\\&=\frac{4}{3}\pi a^3\int_1^{\frac{\sqrt2}{2}}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}(-dt)\quad[\cos\theta=t]\\&=\frac{4}{3}\pi a^3\cdot2^{\frac{3}{2}}\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}dt\\&=\frac{4\pi}{3}a^3 2^{\frac{3}{2}}\left[\frac{t}{4}\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)\right.\\&\qquad\left.\times\left\{t\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}\right|\right\}\right]_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}\\&\hspace{20em}(\because③)\\&=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot2^{\frac{3}{2}}\left\{-\frac{1}{16\sqrt2}+\frac{3}{32}\log(\sqrt2+1)\right\}\\&=\pi a^3\left\{\frac{\sqrt2}{4}\log(\sqrt2+1)-\frac{1}{6}\right\}\end{aligned}$$

となる。この例では直交座標の方が計算しやすい。

$r^2=a^2\cos2\theta$ は $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

となるから

$$y^4+(2x^2+a^2)y^2+x^4-a^2x^2=0$$

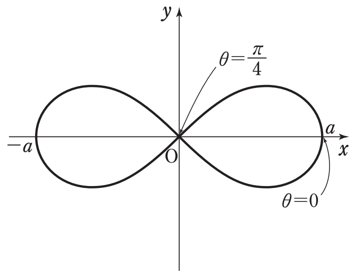
$y^2\geqq0$ であるから

$$y^2=\frac{-(2x^2+a^2)+\sqrt{8a^2x^2+x^4}}{2}$$

したがって，求める体積 V は

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^{a}y^2dx\\&=\pi\int_0^{a}\{-(2x^2+a^2)+\sqrt{8a^2x^2+a^4}\}dx\\&=\pi\int_0^{a}\left(-2x^2-a^2+2\sqrt2\,a\sqrt{x^2+\frac{a^2}{8}}\right)dx\\&=\pi\left[-\frac{2}{3}x^3-a^2x+\sqrt2\,a\right.\\&\qquad\left.\times\left\{x\sqrt{x^2+\frac{a^2}{8}}+\frac{a^2}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{8}}\right)\right\}\right]_0^{a}\\&\hspace{20em}(\because②)\\&=\pi a^3\left\{\frac{\sqrt2}{4}\log(\sqrt2+1)-\frac{1}{6}\right\}\end{aligned}$$

と求めることができる。



［追記］ これは2012年1月に投稿したものであるが，公式⑤が今年度の慶應大学医学部の［iv］番の問題に出題されている。

（元栃木県立佐野高等学校）