三角形の 3 つの角に関する問題から
－自作問題と生徒の解答から考えたこと－

中原（なかはら）　克芳（かつよし）

§1. はじめに

以下の小論文を読む前に，次の問題A(自作)を考えてみて下さい。

> ［**問題A**］　△ABC において，$\cos A=\dfrac{2}{3}$，$\cos B=\dfrac{2}{7}$ のとき，$\cos C$ の値を求めよ。

この問題の出題意図は，三角形の内角の和は 180° であるという小学生でも知っている知識から，三角形の 2 角がわかっているとき残りの 1 つの角も得られることを，具体例で確認することです。ただし，三角形の 2 角は角度ではなく余弦の値で与えられていることが，小学校の問題と違うところです。それは余弦(cos)とは角の表し方の一つであり，特に 0° 以上 180° 以下の角が cos という関数により，－1 以上 1 以下の実数と 1：1 に対応するという性質を利用したものです。

このように考えれば自然な問題設定であるため，多くの大学で出題または問題集に掲載されていても不思議はないはずでしょうが，勉強不足もあって，類題を見たことがありません。そして出題意図から，次の自然な解答が導かれます。

［**解A**］　三角形の内角の和より $0°<A,\ B,\ C<180°$，かつ $A+B+C=180°$ である。

また $\cos A=\dfrac{2}{3}$，$\cos B=\dfrac{2}{7}$ より

$$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{3},\quad \sin B=\frac{3\sqrt{5}}{7} \qquad \cdots\cdots①$$

となる。ここで

$$\cos C=\cos(180°-(A+B))=-\cos(A+B)$$

より加法定理を用いれば，

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B$$
$$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}=\frac{11}{21} \qquad (答)$$

§2. 生徒の反応

この問題を，高校 3 年生に解かせてみました。対象生徒は数学ⅠⅡAB 選択の文系基礎クラス 22 名，いわゆる難関校ではないが受験に数学の記述が必要な生徒達，ただし私立薬科大学希望者も含まれます。どちらかと言えば数学が得意ではない生徒達です。そして上記のような解答が 8 名と，約 $\dfrac{1}{3}$ の者が正解し，しかも正解者はそれなりの速さ(20 分以内)で解いていました。このことからも，この問題はそれほど難しくはないと言って良いと思われます。なお時間設定は，授業時間内(50 分)で解けば良いとして，早く解いた生徒には自主的に問題集を解くように言っておきました。

さて，この問題に関して，中々解けない生徒に対しては，三角関数の様々な公式を考えよ，とヒントを出しました。もっともこちらで想定した公式は上記の通り，相互法則・y 軸対称・加法定理くらいでしたが。

しかし生徒はさすがというべきか，実に様々な発想を見せてくれました。それは三角形から自然に考えられる余弦定理・正弦定理・面積の公式等の利用です。ある生徒は正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

より，また別の生徒は面積の公式

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

から，上記①より $\sin A$，$\sin B$ の値を用いて，a と b についての関係式

$$9a=7b \qquad \cdots\cdots②$$

を導きました(これらはともに複数名の生徒が書いていました)。これらのことから，正弦定理と三角形の面積の公式とは，関連が深いことがうかがえま

す。

一方で，2つの角A，Bに関する余弦定理から

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots③$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cdot\frac{2}{7} \qquad \cdots\cdots④$$

を導いた生徒もやはり複数名いました。

彼女らはその後にもいろいろな計算をしてはいましたが，残念ながらこれらの方法で正解に至るものは現れませんでした。しかしこのように出題者にない発想は，出題者を喜ばせるに十分余りあるものです。実際，これらの方法を考え直して正解に到達することができました。そこでそれを新たに出題します。すなわち[問題A]の解法に条件を付けるのです。

§3. 解法の仕方に条件をつけた解答

［**問題B**］　正弦定理と角Cについての余弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \qquad \cdots\cdots⑤$$

を用いて，問題Aを解け。

［**問題C**］　3つの角に関する余弦定理③，④，⑤を用いて問題Aを解け。

問題Bについては，教科書・参考書にも書かれている解法の応用，いわゆる連比の計算で解けそうです。問題Cについても，このように3つの式を書き並べれば，和や差を取れば未知数が減らせるため，何とかなりそうな気がするのではないでしょうか。それでは解説の都合で問題Bの解答は後回しにして，問題Cの解答から述べましょう。

［**解答C**］　③＋④ より $2c^2=\frac{4}{7}ca+\frac{4}{3}bc$

$$\therefore\quad c=\frac{2}{21}(3a+7b) \qquad \cdots\cdots⑥$$

また ③－④ より

$$a^2-b^2=b^2-a^2-\frac{4}{3}bc+\frac{4}{7}ca$$

$$\therefore\quad 2(a^2-b^2)=\frac{4}{21}c(3a-7b)$$

ここで⑥を代入すれば

$$(\text{右辺})=\frac{4}{21}\cdot\frac{2}{21}(3a+7b)(3a-7b)$$

$$=\frac{8}{441}(9a^2-49b^2)$$

これを整理すれば $9a=7b$ となり，関係式②が得られる。また再び⑥を用いれば

$$b=\frac{9}{7}a,\ c=\frac{8}{7}a \qquad \cdots\cdots⑦$$

となる。これは△ABCの3辺の比を表すため，余弦定理の基本問題に帰結する。すなわち⑦を⑤に代入して計算すれば，$\cos C=\frac{11}{21}$ を得る。終

さて，解答Cの解法では，直接は正弦定理を使っていませんが，結局は正弦定理から得られる3辺の比⑦を用いることになりました。

また解答Cで見逃せない点がもう一点あります。それは途中の式変形でうまく和と差の積が出てaとbの関係が簡明になりました。これはこの問題特有のものなのでしょうか。それを確認するには，一般の場合の余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

について考えれば良いわけです。これらの2式の和を取って両辺をcで割れば

$$c=a\cos B+b\cos A \qquad \cdots\cdots⑧$$

が得られます。これは第1余弦定理です。また2式の差を取れば

$$a^2-b^2=b^2-a^2+2c(a\cos B-b\cos A),$$

となり，⑧式を代入すれば

$$2(a^2-b^2)$$
$$=2(a\cos B+b\cos A)(a\cos B-b\cos A)$$

となって，和と差の積が得られるのです。すなわち和と差の積は偶然ではなく必然であったようです。さらにこの式を変形すれば

$$a^2-b^2=a^2\cos^2 B-b^2\cos^2 A,$$
$$a^2(1-\cos^2 B)=b^2(1-\cos^2 A),$$
$$a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A$$

となり，結局あれこれと式をいじりまわした結果，正弦定理に戻ってしまいました。不勉強にして知らなかったのですが，恐らくこの式変形は余弦定理から正弦定理を導く既に知られた方法なのでしょう。そして具体的な問題より一般論の方が見通しが立てやすい好例と言えるでしょう。何かお釈迦様の掌の上で遊ばされたような気もしないではありませんが，定理の間の関係を垣間見ることができて勉強になったと思った方が賢明そうなので，そう思うことにしました。

それでは次に問題Bについて考えてみましょう。

［**解答B**］　△ABC の外接円の半径を R とすると，

正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ より

$$a=\frac{2\sqrt{5}}{3}R,\ b=\frac{6\sqrt{5}}{7}R,\ c=2R\sin C \quad \cdots⑨$$

が得られる。これらを⑤に代入すれば

$$4R^2\sin^2 C$$
$$=\frac{20}{9}R^2+\frac{180}{49}R^2-2\cdot\frac{60}{21}R^2\cdot\cos C$$

となる。ここで $\sin^2 C=1-\cos^2 C$ とし，両辺を $4R^2$ で割って整理すれば，$\cos C$ についての次の2次方程式

$$441\cos^2 C-1260\cos C+209=0 \quad \cdots\cdots⑩$$

が得られる…。

このままでは係数が大きくなり過ぎて計算が大変です。実際何人かの生徒はこの前後で計算間違い，あるいは計算を断念してしまいました。しかし分母を払う際に $21\cos C$ でまとめることに気づけば，2次方程式⑩は

$$(21\cos C)^2-60(21\cos C)+209=0$$

となるため

$$(21\cos C-19)(21\cos C-11)=0,$$

のように因数分解ができ，解として

$$\cos C=\frac{19}{21},\ \frac{11}{21}$$

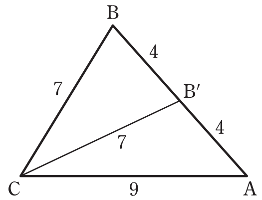
が得られます。これで2次方程式⑩を解くことは出来ましたが，別の問題が生じました。正解は $\cos C=\dfrac{11}{21}$ でしたから，$\cos C=\dfrac{19}{21}$ は不適であるはずです。それはどのようにして示せば良いのでしょうか。またこの余弦の値は不適であるにも関わらず，何か意味がありそうです。それはどのような意味を持つのでしょうか。

この2つの疑問を解決するには，やはり図を描くべきでしょう。$\cos C=\dfrac{11}{21}$ のとき $\sin C=\dfrac{8\sqrt{5}}{21}$ となり，$\cos C=\dfrac{19}{21}$ のときは $\sin C=\dfrac{4\sqrt{5}}{21}$ となるため，⑨を用いればそれぞれ3辺の比は

$\cos C=\dfrac{11}{21}$ のとき $a:b:c=7:9:8$

$\cos C=\dfrac{19}{21}$ のとき $a:b:c=7:9:4$

となります。便宜上後者の三角形を △AB′C として，これら2つの三角形を辺 CA と角Aが重なるように1つの図に描けば，三角形の重ならない部分は図のように，3辺の比が $7:7:4$ である二等辺三角形になります。



この図から

$$\angle AB'C=180°-\angle ABC$$

であることがわかるため，正弦の値は等しいが余弦の値は符号だけ違うことがわかります。

これで原因がはっきりしました。すなわち，正弦関数 $\sin\theta$ が，$0°<\theta<180°$ に対して 1：1 関数ではなく，問題文の $\cos B$ を $\sin B$ に変形してから使ったことから，$\cos C=\dfrac{19}{21}$ という誤答が導き出されたのです。

確かに問題集の問題でも，$\sin\theta$ から θ の値が2つ得られるため問題の吟味が必要になり，生徒が悩む場面に良く出会います。ということは，cos で与えられた数値を sin に戻して用いる解答Bは別解としてはあまり好ましくないと言えそうです。

三角関数はその発生からサイン，コサインの順に呼ばれることが多いのですが，三角形の形状を考える場合は，余弦 cos の方が正弦 sin よりも本質的ではないかと考えさせられました。

§4. おわりに

以上，生徒に問題を解かせた際の感想に過ぎませんが，読者の方が授業・研究等に役立てて下されば幸いに思います。

最後になりますが，この問題の三角関数の数値は簡単になり，生徒にも計算しやすくしてあります。これは本誌 No.31 の拙稿「三角関数の公式の練習問題における工夫」を利用したものです。

（広島県　広島女学院中学高等学校）