垂直条件 $mm'=-1$ の6つの証明

池田（いけだ）　陽一郎（よういちろう）

§0. はじめに

　2直線の垂直条件 $mm'=-1$ の証明は教科書では，①三平方の定理　で示されている。もっとわかりやすい方法はないかと考えたのが，②ベクトル　③行列　④合同　⑤複素平面　を使ったものである。さらに教科書では，⑥相似　を使ったものもある。私の証明は②～⑤の4つであるが，④は特に本質をついていてわかりやすく，⑤は新教育課程でもおもしろく捉えることができるので，お勧めである。③行列は新課程ではなくなるが，これもおもしろい考え方である。

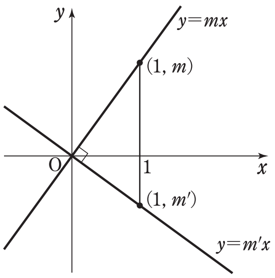
§1. 2直線の垂直条件 $mm'=-1$

> 2直線 $y=mx$ と $y=m'x$ が垂直ならば $mm'=-1$ が成立する。また逆も成立する。

というのが垂直条件である。これは，解析幾何的要素が強いが，他の分野からも考察することができる。

§2. 垂直条件 $mm'=-1$ の証明

①　三平方の定理の利用

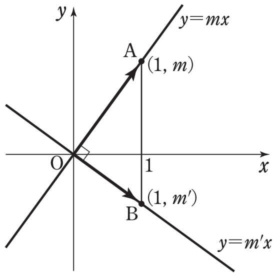


$$(1^2+m^2)+(1^2+m'^2)=(m-m')^2$$

$$2+m^2+m'^2=m^2-2mm'+m'^2$$

$$\therefore\quad mm'=-1$$

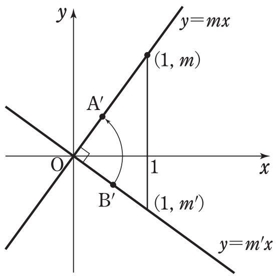
②　ベクトルの利用



$$\begin{aligned}0&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=(1,\ m)\cdot(1,\ m')\\&=1+mm'\end{aligned}$$

$$\therefore\quad mm'=-1$$

③　行列の利用



$\mathrm{OA}'=\mathrm{OB}'=1$ とし B' を $90°$ 回転して A' に移動させたと考えると

$$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 90° & -\sin 90°\\ \sin 90° & \cos 90°\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+m'^2}}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+m'^2}}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+m'^2}}\begin{pmatrix}-m'\\1\end{pmatrix}$$

x 座標を比較すると

$$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{-m'}{\sqrt{1+m'^2}}$$

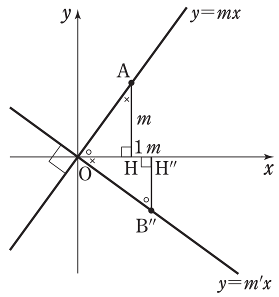
$$\frac{1}{1+m^2}=\frac{m'^2}{1+m'^2}$$

$$1+m'^2=m'^2(1+m^2)$$

$$1=m^2m'^2$$

$$\therefore\quad mm'=-1\quad (\because\ m>0\quad m'<0)$$

④　**合同の性質を利用**



OH＝1，OH″＝m とすると

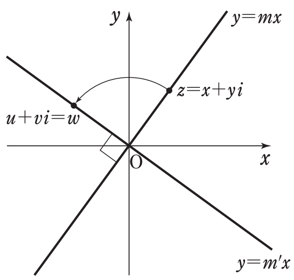
△OHA≡△B″H″O より，B″H″＝1 となる。

直線 $y=m'x$ の傾きは

$$m'=\frac{-1}{m}$$

$$\therefore\quad mm'=-1$$

⑤　**複素平面の利用**



複素数 z を 90° 回転させると w の位置にくる。このとき

$$w=iz$$

と表せる。

$$\left(\because\quad \arg w=\arg iz=\arg i+\arg z=\frac{\pi}{2}+\arg z\right)$$

したがって　$u+vi=i(x+yi)$

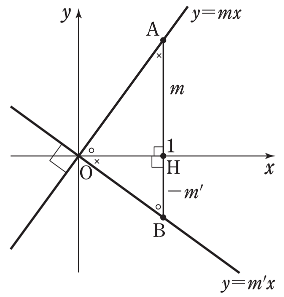
$$u+vi=-y+xi$$

$$\therefore\quad u=-y,\ v=x$$

ところが　$v=m'u$ より　($y=mx$ でもある。)

$$x=m'(-y)=-m'mx\qquad \therefore\quad mm'=-1$$

⑥　**相似の性質を利用**



△OHA∽△BHO より

$$\frac{m}{1}=\frac{1}{-m'}$$

$$\therefore\quad mm'=-1$$

§3. おわりに

垂直条件 $mm'=-1$ の証明は，とりあえず 6 つ得られたが，どの証明も意味があると思う。しかし，その中でも④の三角形の合同を使った証明は，傾き m' を直接求めたものであり，直観的にも非常にわかりやすいので，生徒たちに示すときはとてもいいものだと思う。初等的であるが本質的であるという意味では，お勧めである。また，③は高校生の視野から外に出るが，⑤の複素平面は，これからの高校生には新鮮であろう。

《参考文献》

〔1〕　数学Ⅱ　数研出版 2003

（東京都立永山高等学校）