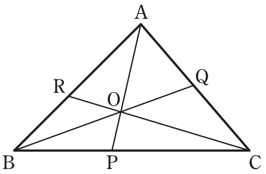
チェバ・メネラウスの定理から導く三角形の不等式

中村(なかむら) 公一(こういち)

§1. はじめに

三角形 ABC で点Oを三角形の内部にとり図のように設定した場合，



チェバの定理は $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$ ですが，ときどき $\dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}\cdot\dfrac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OR}}=1$ と間違える生徒がいます。もちろん後者の式は成立しません。しかしこの $\dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}\cdot\dfrac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OR}}$ の値は何か法則があるのでしょうか。既に知られている事実とは思いますが，チェバの定理とメネラウスの定理で遊んでみました。

§2. 定理Aの証明

【定理A】

$\dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}\cdot\dfrac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OR}}\geqq 8$ であり，等号が成り立つ場合は点Oが三角形の重心のときに限る。

《証明》

式を見やすくするために各線分の長さを下記のように表します。

BP$=a$　PC$=b$　CQ$=c$　QA$=d$　AR$=e$
RB$=f$　OP$=g$　CO$=h$　OQ$=i$　AO$=j$
OR$=k$　BO$=l$

メネラウスの定理より

△ABP と直線 CR で $\dfrac{e}{f}\cdot\dfrac{a+b}{b}\cdot\dfrac{g}{j}=1$

△BCR と直線 AP で $\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{e+f}{e}\cdot\dfrac{k}{h}=1$

△ABQ と直線 CR で $\dfrac{f}{e}\cdot\dfrac{c+d}{c}\cdot\dfrac{i}{l}=1$

これら 3 式を辺々掛けて

$$\frac{gki(a+b)(c+d)(e+f)}{acejlh}=1$$

これから

$$\frac{j}{g}\cdot\frac{l}{i}\cdot\frac{h}{k}=\frac{a+b}{a}\cdot\frac{c+d}{c}\cdot\frac{e+f}{e}$$

$$=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{d}{c}\right)\left(1+\frac{f}{e}\right)\quad\cdots\cdots①$$

次にチェバの定理より

$\dfrac{e}{f}\cdot\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=1$　∴ $\dfrac{f}{e}=\dfrac{ac}{bd}$ これを①にあてはめて

$$\frac{j}{g}\cdot\frac{l}{i}\cdot\frac{h}{k}=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{d}{c}\right)\left(1+\frac{ac}{bd}\right)$$

$$=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{d}{c}+\frac{c}{d}+\frac{bd}{ac}+\frac{ac}{bd}$$

（相加平均と相乗平均の関係より）

$$\geqq 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{d}{c}\cdot\frac{c}{d}}+2\sqrt{\frac{bd}{ac}\cdot\frac{ac}{bd}}=8$$

つまり　$\dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}\cdot\dfrac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OR}}\geqq 8$ が導かれました。

なお，等号が成り立つのは $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{d}{c}=\dfrac{c}{d}$，$\dfrac{bd}{ac}=\dfrac{ac}{bd}$ より $a=b$，$d=c$ の場合で，これは点Oが三角形の中線の交点，つまり重心であることを示しています。■

§3. 証明の副産物

式①は

$\dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}\cdot\dfrac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OR}}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BP}}\cdot\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AR}}$ を示しています。

さらにチェバの定理 $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$ より

BP・CQ・AR$=$CP・AQ・BR ですから

【公式B】

$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}\cdot\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OQ}}\cdot\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OR}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CQ}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AR}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AQ}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BR}}$$

が導かれます。

この $\frac{AO}{OP}\cdot\frac{BO}{OQ}\cdot\frac{CO}{OR}$ のもつ意味について調べると次の事実に到達しました。

> **【定理C】**
> $\frac{AO}{OP}\cdot\frac{BO}{OQ}\cdot\frac{CO}{OR}=2\cdot\frac{\triangle ABC}{\triangle PQR}$ になる。
> ただし，$\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ はそれぞれ $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の面積を表す。

《証明》

$\triangle ABC=S$，$\frac{a}{b}=x$，$\frac{c}{d}=y$，$\frac{e}{f}=z$ とおきます。ただし，a，b，c，$d\cdots$ は定理Aの証明で用いた各線分の長さを表すものとします。

$$\triangle BPR=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{f}{e+f}S=\frac{x}{(x+1)(z+1)}S$$

$$\triangle CQP=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d}S=\frac{y}{(x+1)(y+1)}S$$

$$\triangle ARQ=\frac{d}{c+d}\cdot\frac{e}{e+f}S=\frac{y}{(x+1)(y+1)}S$$

$$\triangle PQR=S-\left\{\frac{x}{(x+1)(z+1)}+\frac{y}{(x+1)(y+1)}+\frac{z}{(y+1)(z+1)}\right\}S$$

$$=\frac{1+xyz}{(x+1)(y+1)(z+1)}S$$

チェバの定理より $xyz=1$ であり

$$x+1=\frac{a+b}{b}=\frac{BC}{CP},\quad y+1=\frac{c+d}{d}=\frac{CA}{AQ}$$

$$z+1=\frac{e+f}{f}=\frac{AB}{BR}$$ ですから

$$\triangle PQR=2\cdot\left(\frac{BC}{CP}\cdot\frac{CA}{AQ}\cdot\frac{AB}{BR}\right)^{-1}S$$

公式Bより

$$\triangle PQR=2\cdot\left(\frac{AO}{OP}\cdot\frac{BO}{OQ}\cdot\frac{CO}{OR}\right)^{-1}\triangle ABC$$

ゆえに $\frac{AO}{OP}\cdot\frac{BO}{OQ}\cdot\frac{CO}{OR}=2\cdot\frac{\triangle ABC}{\triangle PQR}$ ■

この $\frac{AO}{OP}\cdot\frac{BO}{OQ}\cdot\frac{CO}{OR}$ の値は内部と外部の2つの三角形の面積比に関連する数値だったのです。

定理Aの結果と合わせて表現すると，「$\triangle PQR$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{4}$ 以下であり，最大値 $\frac{1}{4}$ になるのは，点Oが $\triangle ABC$ の重心にあるときに限る」という結論になります。

§4. 注意

点Oを三角形の外部にとった場合，チェバの定理やメネラウスの定理 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ を拡張して使うことができます。省略しますが，その場合も公式Bや定理Cは成り立ちます。

しかし，この場合残念ながら定理Aは成り立ちません。$\frac{AO}{OP}\cdot\frac{BO}{OQ}\cdot\frac{CO}{OR}$ の値はすべての正数値をとりえます。実際に，点Oを三角形の外部の点におき，$\frac{BO}{OQ}$ と $\frac{CO}{OR}$ を有限値に保ったまま，辺ABに近づけていくと $\frac{AO}{OP}$ が∞に発散していきます。また $\frac{BO}{OQ}$ と $\frac{CO}{OR}$ を有限値に保ったまま，点OをOAが辺BCと並行になる位置に近づけていくと $\frac{AO}{OP}$ が0に収束します。

また，チェバの定理は五角形や七角形などの奇数角形，メネラウスの定理も四角形以上の多角形に拡張できることが知られていますが，定理Aを四角形以上に拡張することはできません。たとえ点Oを多角形の中にとっても，頂点からOへ引いた直線と対辺との交点が多角形の外に出てしまうことがあるためです。

以上の点をふまえて改めて定理AとCさらに公式Bをミックスして書き直すと以下のようになります。

> **【定理】**
> 点Oを $\triangle ABC$ の内部にとり，直線AOと辺BCの交点をP，直線BOと辺ACの交点をQ，直線COと辺ABの交点をRとしたとき，次の等式および不等式が成り立つ。
> $$\frac{AO}{OP}\cdot\frac{BO}{OQ}\cdot\frac{CO}{OR}=2\cdot\frac{\triangle ABC}{\triangle PQR}$$
> $$=\frac{BC}{BP}\cdot\frac{AC}{CQ}\cdot\frac{AB}{AR}=\frac{BC}{CP}\cdot\frac{CA}{AQ}\cdot\frac{AB}{BR}$$
> $$\geqq 8$$
> ただし，不等式の等号が成り立つのは点Oが $\triangle ABC$ の重心のときに限る。

（長野県　須坂高等学校）