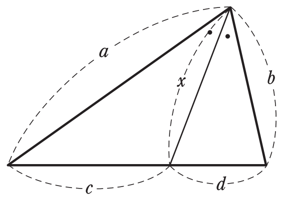
角の二等分線の長さを求める公式の証明

藤岡（ふじおか）　優太（まさと）

§1. 典型的な証明

問　下図で $x^2=ab-cd$ …(Ⅰ) を示せ。



上記の問題に対する典型的な解法が以下です。

典型的な証明

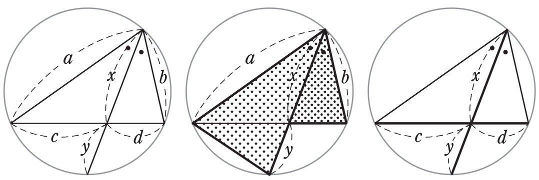


図１　　図２　　図３

図１のように三角形の外接円を考え y を設定すると

$\begin{cases} a:(x+y)=x:b & \text{(図２で打点部三角形の相似より)} \\ xy=cd & \text{(図３で方べきの定理より)} \end{cases}$

から

$\begin{cases} ab=(x+y)x=x^2+xy & \cdots① \\ xy=cd & \cdots② \end{cases}$

であり②を①に代入して $x^2=ab-cd$ とわかる。

■

この解法は非常にスッキリしていますが，補助円を考える点や y を設定する点から自力では思いつきにくく，また『なぜ公式が成り立つのか』ということがストレートにはわかりにくいように思います。
(幾何の得意な人には
・積 ab をつくる → 相似をつくる → 補助円
・積 cd → 方べきの定理
と簡単？に発想できますが…)

そこで，もう少し自然でストレートな解法がないか考えてみました。

§2. 積 → 面積 を利用した証明

左の図において，・$=\alpha$ とすると $0<2\alpha<2\pi$ から $\sin 2\alpha\neq 0$ であり $x^2=ab-cd$ …(Ⅰ) は

$\frac{1}{2}x^2\sin 2\alpha=\frac{1}{2}ab\sin 2\alpha-\frac{1}{2}cd\sin 2\alpha$　つまり

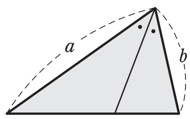
$\frac{1}{2}ab\sin 2\alpha=\frac{1}{2}x^2\sin 2\alpha+\frac{1}{2}cd\sin 2\alpha$ …(Ⅱ)

と同値です。ここでは(Ⅱ)を面積を用いて，図でイメージ的に示します。

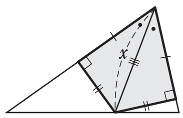
(Ⅱ)の証明

$\frac{1}{2}ab\sin 2\alpha$

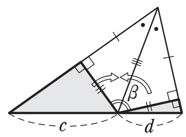
$=$



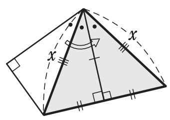
$=$



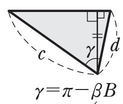
$+$



$=$



$+$



$\gamma=\pi-\beta B$
$\quad=\pi-(\pi-2\alpha)$
$\quad=2\alpha$

$=\frac{1}{2}x^2\sin 2\alpha+\frac{1}{2}cd\sin 2\alpha$

となります。■

《参考文献》

〔１〕　モノグラフ 26 幾何学
－発見的方法－改訂版(科学新興社)
$p.19$　問題 5－4　$p.174$　略解と解答 4

(高知県　土佐高等学校)