四面体の二面角の和
－三角形の内角の和は 2 直角の類似－

一松　信（ひとつまつ　しん）

§1. 問題の趣旨

三角形の 3 個の内角の和は 2 直角(あるいは一定値)である。これはユークリッド平面幾何学の基本的な定理である。

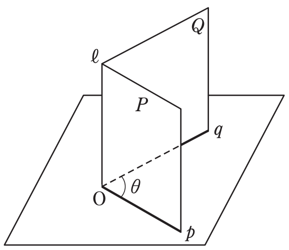
類似の結果が 3 次元の四面体に拡張できるか？　例えば 6 個の辺における二面角の和が一定値になるか？　これは誰しも一度は考えてみる(？)事項かもしれない。

誤解のないように一言すると，上述のような性質は成立しない(後述)。しかし 6 個の二面角の間にはある「恒等式」(後述の式(4))が成立し，それが平面三角形で内角の和が 2 直角という定理の「拡張」になっている。ただしその式は(高校数学の範囲を超える)行列式を使って表現されるために，普通の教科書には載っていない。

その意味で若干「逸脱」だが，注意を喚起する意味で紹介したいと思う。

§2. 二面角とは

3 次元空間内の平行でない 2 枚の平面 P，Q は一直線 ℓ で交わる。このとき P，Q の間の二面角とは ℓ 上の一点Oを通りおのおのの平面上で ℓ と垂直な直線 p，q を作ったとき，2 直線 p，q が点Oにおいてなす角 θ である。その大きさが ℓ 上の点Oの位置によらずに一定であることは「平行線の公理」を活用して証明できる。昔の教科書には図 1 のような図が載っていて「屏風を立てたような形」と形容されていた。



〔図 1〕屏風を立てたような二面角

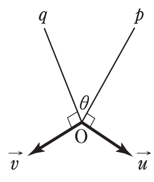
しかし近年では立体幾何を扱わなくなったせいか，この用語が死語に近くなった(？)。数学検定で特定の四面体の二面角を計算する問題に対して，各面の三角形の内角を計算して済ませた誤答が予想外に多かったという。

二面角を計算するために近年ではベクトルが活用されている。前記の点Oにおいて両面 P，Q に垂直な「法線ベクトル」$\vec{u}$，$\vec{v}$ を作れば，二面角 θ は $\vec{u}$，$\vec{v}$ のなす角の補角であり，後者の角は両ベクトルの内積から容易に計算できる(図 2)。

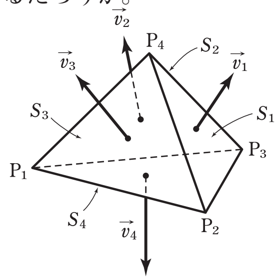
ところで四面体の 4 面に対する外向きの単位法線ベクトル $\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$，$\vec{v_3}$，$\vec{v_4}$ を作ると，これらは 3 次元空間内の 4 本のベクトルだから当然一次従属だが，どういう関係式が成立するか？　その答は $\vec{v_i}$ に垂直な表面の三角形の面積を S_i とするとき

$$\sum_{i=1}^{4} S_i\vec{v_i} = S_1\vec{v_1} + S_2\vec{v_2} + S_3\vec{v_3} + S_4\vec{v_4} = \vec{0} \qquad (1)$$

である。(1)については次のような図 3 の「物理学的な」説明で納得して頂けるだろうか。



〔図 2〕二面角を上から見る



〔図 3〕四面角の法線ベクトル

四面体を中空の 4 面の膜でできた容器と考えて内部に空気を吹き込むと，各面に $S_i\vec{v_i}$ に比例した力がかかる。もしもその和(1)(合力)が零ベクトルでなければ，四面体が自動的にそのベクトルの方向に動き続ける。このような「永久運動」はあり得ないはずである。

このような説明が「厳密でない」と思う方は，(1)の数学的に厳密な証明を各自で考えてほしい。

§3. 四面体の二面角の間の関係式

前節の記号で面積 S_i，S_j $(i \neq j)$ の2面の交線を $\ell_{ij}(=\ell_{ji})$，そこでの二面角を $\theta_{ij}(=\theta_{ji})$ とすると

$$\cos\theta_{ij}=-\langle\vec{v_i},\ \vec{v_j}\rangle \quad (内積)$$

である。便宜上 $a_{ii}=1=\langle\vec{v_i},\ \vec{v_i}\rangle$ （大きさ1）とし，

$$a_{ij}=a_{ji}=-\cos\theta_{ij}=\langle\vec{v_i},\ \vec{v_j}\rangle \quad (i\neq j) \tag{2}$$

とおいて，これらを成分とする4次の行列式

$$|a_{ij}|=|\langle\vec{v_i},\ \vec{v_j}\rangle|,\ i,j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{3}$$

を作る。この行列式の第 i 行に S_i をかけて加えれば，等式(1)によって $\Sigma S_i\vec{v_i}=\vec{0}$ であるから，行列式(3)の値は0に等しい。すなわち次の等式を得る。

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos\theta_{12} & -\cos\theta_{13} & -\cos\theta_{14} \\ -\cos\theta_{12} & 1 & -\cos\theta_{23} & -\cos\theta_{24} \\ -\cos\theta_{13} & -\cos\theta_{23} & 1 & -\cos\theta_{34} \\ -\cos\theta_{14} & -\cos\theta_{24} & -\cos\theta_{34} & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{4}$$

これが四面体の6辺における二面角6個の間に成立する「恒等式」である。(4)を展開することもできるが，かえって複雑で見透しが悪い。なおサリュス(サラス)の展開の類似を4次の行列式に機械的に適用しては誤りであることを念のために注意しておく。

§4. 2次元の三角形の場合

上記の議論の類似を2次元の三角形について論ずれば(4)と同様の「恒等式」

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos\theta_{12} & -\cos\theta_{13} \\ -\cos\theta_{12} & 1 & -\cos\theta_{23} \\ -\cos\theta_{13} & -\cos\theta_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ -\cos\gamma & 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & -\cos\alpha & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{4$'$}$$

を得る。ただし記述を略記するために

$$\alpha=\theta_{23},\ \beta=\theta_{13},\ \gamma=\theta_{12}$$

とおいた。(4)′を展開すれば

$$1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0 \tag{5}$$

となる。(5)は $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ のときに成立する重要な等式だが，$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ は一つの十分条件であり，(5)の必要十分条件とは限らない。

念のために，まず $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ のとき(5)が成立することを証明する。もちろんいろいろと可能だが次のが簡潔だと思う。$\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$ から

$$\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta$$

（加法定理）

を書きかえて $\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta$ である。この両辺を2乗すると

$$\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\alpha\cos^2\beta$$
$$=\sin^2\alpha\sin^2\beta=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$$
$$=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$$

である。これを整理すれば(5)を得る。

逆に(5)が成立するとすれば，$\cos\gamma$ の2次方程式

$$\cos^2\gamma+2(\cos\alpha\cos\beta)\cos\gamma+(\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1)=0$$

とみなして $\cos\gamma$ について解くと

$$\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta$$
$$\pm\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+1}$$

である。この根号内は

$(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=\sin^2\alpha\sin^2\beta$ に等しいから

$$\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta\pm\sin\alpha\sin\beta=-\cos(\alpha\pm\beta) \tag{6}$$

を得る。さて α, β, γ がすべて0°と180°の間の角とする。さらにユークリッドが強調しているように，三角形の2内角の和は180°未満である。この事実は平行線の公理を使わずに証明できる。ただしそのためにはユークリッドが明記していない「順序の公理」を正しく論ずる必要がある。

そのような制限の下で(6)は γ が $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ または $\beta-\alpha$ の補角であるという場合にのみ成立する。しかし，後二者は $\gamma+\alpha$ あるいは $\gamma+\beta$ が180°より大きくなって不可である。結局三角形の3内角の α，β，γ については(6)は

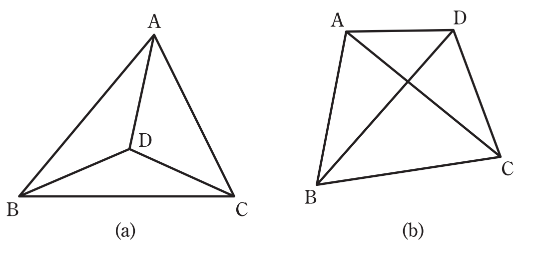
$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

の場合のみに成立し，結果的にこれが必要十分条件になる。

以上のような考察によって，見掛けは著しく異なるが(4)が「三角形の内角の和は2直角」という命題の3次元版であることが裏付けられたと思う。

§5. 二面角の和

前節でその一端を示したように，平面の三角形で内角の和が一定という結論は，2次元の場合の特殊性が強く影響している。3次元の場合に等式(4)から



〔図4〕四面体を押し潰す

「θ_{ij} の和が一定値である」と結論しようといった無駄な証明の努力はしないで頂きたい。

θ_{ij} の和が一定でないことは，数学でよく試みる手法だが「極端な場合」を考えるとよい。この問題では四面体を「平面に押し潰した」極限を考える。その潰し方には図 4 のような(a)と(b)と 2 通りの方法がある。前者は一頂点を他の三角形の内部に潰した場合，後者は相対する一対の辺が交わるように四角形に潰した場合である。

(a)のときには二面角は 3 個が 0，3 個が 2 直角に近づき，合計は 6 直角に近づく。(b)のときは 4 個の二面角が 0, 2 個が 2 直角に近づき，合計は 4 直角に近づく。実はこの両者が両極端であって，四面体の 6 個の二面角の和はつねに 4 直角より大きく 6 直角より小さい(もちろん一定値ではない)。

それにもかかわらず，模型を作って実測してみると，二面角の合計が多くは 420° に近い値になる。400° 以下や 450° 以上になる例は，意図的に作る工夫がいる。

当初はこの課題についてもっと論ずる予定だった。しかし「特定の規則のない」結果は退屈だろうと考えて割愛することにした。ただ次の事実は若干難しいが興味ある事実と思うので，結果のみを記して結びとする。

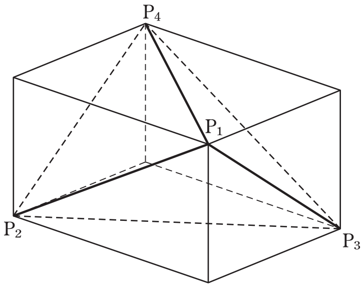
1°　4 面の面積がすべて等しい「等積四面体」のうち，6 個の二面角の和が最大なものは正四面体である。

2°　底面が正三角形で他の頂点が底面の中心を通りその面に垂直な直線上にある「正三角錐」のうち，6 個の二面角の和が最小なものは正四面体である。

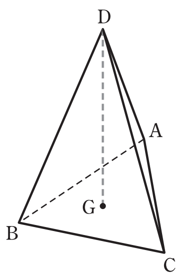
ということは正四面体の場合の和の値

$6\theta=423^\circ.16079\cdots$ (詳しくは $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$,

$\theta=70^\circ.526779\cdots$) が一種の「鞍点」になっている。



〔図 5〕等種四面体



〔図 6〕正三角錐

これについて若干解説を補充する。1°の等積四面体は直方体の一つおきの頂点を結んでできる等面四面体である(図 5)。すなわち各面は互いに合同な鋭角三角形であり，相対する 3 対の辺どうしは長さが等しく，そこでの二面角も等しい。

$$\theta_{12}=\theta_{34}=\alpha,\ \theta_{13}=\theta_{24}=\beta,\ \theta_{14}=\theta_{23}=\gamma$$

(α，β，γ はそう略記するという意味)。このとき行列式(4)は展開して因数分解ができ

$$\begin{aligned}(4)=&(1-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma)\\ &\times(1-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\\ &\times(1+\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma)\\ &\times(1+\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma)\end{aligned} \tag{7}$$

と表される。ただし，等積四面体の二面角 3 対は

$$1-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma=0 \tag{8}$$

を満足する。(8)の下で $\alpha+\beta+\gamma$ の最大を調べると，それは $\alpha=\beta=\gamma$ $\left(\cos\alpha=\dfrac{1}{3}\right)$ のときで，正四面体に該当する。このことは例えば $y=\cos x$ のグラフが $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ (90°) において上に凸であることを活用して証明できる。

正三角錐(図 6)に関する 2° の性質は(4)を活用してもできるが，直接に底面の三角形 ABC を固定し，高さ DG を変数として底面と側面，および側面どうしの二面角を計算しても確かめられる。詳細は長くなるので申し訳ないがこれ以上の説明を省略する。

§6. むすび

四面体の「拡がり」を表す量としては，さらに頂点における「三面角」(正確にはそこでの立体角)の概念がある。もちろん 4 個の和が一定といった関係は成立しない。これも各辺での二面角などによって計算できる。調べるのは悪くないが，計算は大変である (文献参照)。

最後のほうは結果を挙げただけで不満足であるが，四面体の二面角の和について一言した次第である。

《参考文献》

[1]　五十嵐貫他，円周角の定理の球への拡張について，日本数学教育学会
高専・大学部会論文誌，18 (2011)，p.35－52

(京都大学名誉教授)