

12個の格子点を通るグラフを表す式

のうき たかし
納城 孝史

§1. 対応表を満たす関数(例1)

平成23年8月27日に開催された第3回マス・フェスタにおいて、中学3年生の生徒が「誕生日は何曜日」を発表した。参考文献[1]にあるように、曜日を計算するとき、次の換算表が使われた。

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3	6	2

y の値は mod 7 で考えているので、 y に7の倍数を適当に加えてもよい。そうして作った換算表は次の通りである。

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y	1	4	6	9	11	14	17	19	22	24	27	30

この表のように対応している x と y に対して、 $y=f(x)$ である関数 f を表す式を求めよう。ただし、補間法による表現は避けたいと思う。

グラフ用紙に座標軸を引き、上の表で決まる12個の点 (x, y) を打つ。

「12個の点に近い直線で、12個の点が y 軸方向でその上に来ない」直線を探す。この直線の条件を正確にいうと、「表の12個の x に対する直線上の点の y 座標が、表の y 以上かつ $y+1$ 未満である」ことである。

図1のように、 y 軸方向の上から、定規を12個の点に当てるように使うと、そのような直線として、5点 $(4, 4)$, $(6, 9)$, $(9, 17)$, $(11, 22)$, $(14, 30)$ のうち2点を通る直線が考えられる。

例えば、2点 $(4, 4)$, $(14, 30)$ を通る直線をとると、その方程式は

$$y = \frac{13}{5}(x-4) + 4 \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{13x-32}{5}$$

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y_1	1.4	4	6.6	9.2	11.8	14.4	17	19.6	22.2	24.8	27.4	30

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y_2	1.5	4.1	6.7	9.3	11.9	14.5	17.1	19.7	22.3	24.9	27.5	30.1

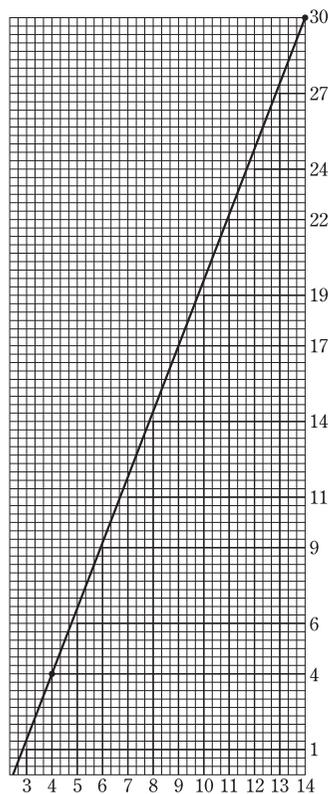


図1

である。

この直線は、上の条件を満たす。すなわち、表の x に対して、 $y = \frac{13x-32}{5}$ の関数値を調べると、その値は表の y 以上かつ $y+1$ 未満である。

上の格子点を通らないが、

$$y = \frac{13}{5}(x-4) + 4.1 \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{13x-31.5}{5}$$

も条件を満たす。実際、

$$y_1 = \frac{13x-32}{5}, \quad y_2 = \frac{13x-31.5}{5}$$

とすると、 y_1, y_2 の値は前頁の下の表のようになる。

このとき、グラフ電卓のテーブル機能を使うと、関数値を簡単に調べることができて便利である。

したがって、

$$f(x) = \left[\frac{13x-32}{5} \right], \left[\frac{13x-31.5}{5} \right]$$

は求める関数である。ここで、 $[\]$ はガウス記号である。

換算表の代わりに、

$$f(x) = \left[\frac{13x-32}{5} \right]$$

を使えば、曜日の計算は数式だけで行われる。

§2. 対応表を満たす関数(例2)

他の例を挙げる。参考文献[2]では、曜日を計算するときに、次のような換算表が使われている。

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

§1の仕方が使えるように、 x の 1, 2 をそれぞれ $-1, 0$ に置き換える。更に、 y に 7 の倍数を適当に加えて、

x	-1	0	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	3	10	13	15	18	20	23	26	28	31	33

を考える。

この対応も $y = f(x)$ の形で表してみよう。

図2のように、グラフ用紙に12個の点を打ち、適当な直線を探す。

例えば、2点 $(0, 3), (9, 26)$ を通る直線の方程式をとると、その方程式は

$$y = \frac{23}{9}x + 3$$

である。

$$y = \left[\frac{23}{9}x + 3 \right]$$

が求める関数であることは容易に確かめられる。

$$y = \left[\frac{23}{9}x + 3.1 \right]$$

も求める関数である。

換算表の代わりに $y = \left[\frac{23}{9}x + 3 \right]$ を使うとき、1月を (-1) 月に、2月を0月に読み替えなければならないのが欠点である。

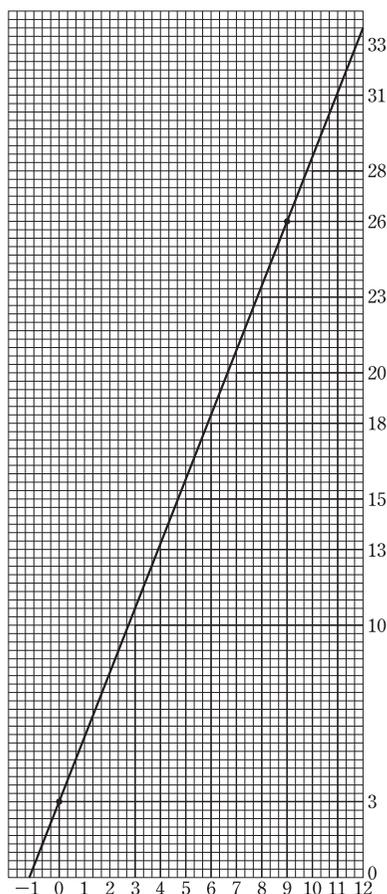


図2

《参考文献》

- [1] 佐々木美咲, 誕生日は何曜日, 第3回マス・フェスタ〈全国数学生徒研究発表会〉レジュメ集
- [2] 小林道正編著, 楽しさ発見! 高校数学I+A, 数研出版, p.127

(大阪府立港南造形高等学校)