n^n と $n!$ についての一考察
$-\prod_{k=1}^{n} k^k k! = (n!)^{n+1}$ を中心にして$-$

にしもと　のりよし
西元　教善

§0. はじめに

$n!$（n の階乗）は異なる n 個のものから重複を認めないで n 個取り出して一列に並べるときの並べ方の総数であり，一方，n^n は異なる n 個のものから重複を認めて n 個取り出して一列に並べるときの並べ方の総数である。当然，重複を認めている場合の方が大きく $n^n \geqq n!$ であるが，これらにはどのような関係があるのであろうか。

本稿では，k^k と $k!$ の積 $k^k k!$ について，$k=1$ から $k=n$ まで掛け合せると $(n!)^{n+1}$ になることを中心に考察する。

§1. $\prod_{k=1}^{n} k^k$ を $n!$ で表す

まず，k^k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ の積 $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \cdots \cdot n^n$ つまり $\prod_{k=1}^{n} k^k$ と n の階乗 $n!$ の関係を考察する。

$n=5$ のとき，$\prod_{k=1}^{5} k^k = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5$ である。

これを階乗で表してみる。

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5 = \frac{1^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 4^5 \cdot 5^5}{1^4 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 4^1}$$

$$= \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)^5}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 2)1}$$

$$= \frac{(5!)^5}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$$

であるから，$\prod_{k=1}^{5} k^k = \dfrac{(5!)^5}{\prod_{k=1}^{4} k!}$ である。

これより，n が 2 以上の自然数のとき

$$\prod_{k=1}^{n} k^k = \frac{(n!)^n}{\prod_{k=1}^{n-1} k!} \quad \cdots\cdots(*)$$

であると推定される。

これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

【証明】 (I)　$n=2$ のとき

$(*)$ の左辺 $= \prod_{k=1}^{2} k^k = 1^1 \cdot 2^2 = 4$,

$(*)$ の右辺 $= \dfrac{(2!)^2}{\prod_{k=1}^{1} k!} = \dfrac{4}{1} = 4$

よって，このとき $(*)$ は成り立つ。

(II)　$n=l(\geqq 2)$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると，

$$\prod_{k=1}^{l} k^k = \frac{(l!)^l}{\prod_{k=1}^{l-1} k!}$$

である。

この等式の両辺に $(l+1)^{l+1}$ を掛けると，

$$(l+1)^{l+1} \prod_{k=1}^{l} k^k = \frac{(l!)^l (l+1)^{l+1}}{\prod_{k=1}^{l-1} k!}$$

$$= \frac{\{(l+1)!\}^l (l+1)}{\prod_{k=1}^{l-1} k!}$$

$$= \frac{\{(l+1)!\}^l (l+1) \cdot l!}{\prod_{k=1}^{l-1} k! \cdot l!}$$

$$= \frac{\{(l+1)!\}^l (l+1)!}{\prod_{k=1}^{l} k!}$$

$$= \frac{\{(l+1)!\}^{l+1}}{\prod_{k=1}^{l} k!}$$

よって，$\prod_{k=1}^{l+1} k^k = \dfrac{\{(l+1)!\}^{l+1}}{\prod_{k=1}^{l} k!}$ である。

したがって，$(*)$ は $n=l+1$ のときも成り立つ。

(I)(II)より，$(*)$ は 2 以上の自然数 n に対して成り立つ。終

これより，次の定理を得る。

> **定理**　n が 2 以上の自然数のとき，
>
> $$\prod_{k=1}^{n} k^k = \frac{(n!)^n}{\prod_{k=1}^{n-1} k!} \quad \text{つまり} \quad \prod_{k=1}^{n} k^k \prod_{k=1}^{n-1} k! = (n!)^n$$

つまり，n が 2 以上の自然数のとき，k^k の $k=1$ か

ら $k=n$ までの積と $k!$ の $k=1$ から $k=n-1$ までの積は $(n!)^n$ に等しいということである。

生徒用として，積の記号 Π を使わなければ，

$(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdot n^n)\{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot(n-1)!\}=(n!)^n$

ということである。

> **定理（変形版１）** n が２以上の自然数のとき，
> $(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdot n^n)\{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot(n-1)!\}$
> $=(n!)^n$

また，この両辺に $n!$ を掛ければ，

$(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdot n^n)\{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot(n-1)!\}n!$
$=(n!)^n\cdot n!$

であるから，

$(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdot n^n)(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot n!)=(n!)^{n+1}$

である。すると，n が２以上の自然数という条件は不要である。

> **定理（変形版２）** n が自然数のとき，
> $(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdot n^n)(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot n!)=(n!)^{n+1}$

さらには，次のようにも表せる。

> **定理（変形版３）** n が自然数のとき，
> $(1^1\cdot 1!)(2^2\cdot 2!)(3^3\cdot 3!)\cdots(n^n\cdot n!)=(n!)^{n+1}$

もっとも簡便に表せば，次の通りである。

> **定理（変形版４）** n が自然数のとき，
> $$\prod_{k=1}^{n} k^k k!=(n!)^{n+1}$$

§2. 定理を使って

対数を使うとどのように表されるか

では，得られた定理を使ってみる。

変形版１から

$(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdot n^n)(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot n!)=(n!)^{n+1}$

この等式の両辺の常用対数をとると，

$\log_{10}\{(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdot n^n)(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot n!)\}$
$=\log_{10}(n!)^{n+1}$

である。左辺は，

$\log_{10}(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdot n^n)+\log_{10}(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot n!)$
$=\log_{10}2^2+\log_{10}3^3+\cdots+\log_{10}n^n$
$+\log_{10}2!+\log_{10}3!+\cdots+\log_{10}n!$

右辺は，

$\log_{10}(n!)^{n+1}=(n+1)(\log_{10}2+\log_{10}3+\cdots+\log_{10}n)$

である。

よって，$\log_{10}2^2+\log_{10}3^3+\cdots+\log_{10}n^n$
$+\log_{10}2!+\log_{10}3!+\cdots+\log_{10}n!$
$=(n+1)(\log_{10}2+\log_{10}3+\cdots+\log_{10}n)$

である。これは，

$\log_{10}(2^2\cdot 2!)+\log_{10}(3^3\cdot 3!)+\cdots+\log_{10}(n^n\cdot n!)$
$=(n+1)(\log_{10}2+\log_{10}3+\cdots+\log_{10}n)$

とも表せる。

$\prod_{k=1}^{n} k^k k!=(n!)^{n+1}$ の別表現－２重の Π での表現－

$k^k k!=(k\cdot k\cdot k\cdot\cdots\cdot k)(1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k)$
$=(1k)(2k)(3k)\cdot\cdots\cdot(kk)=\prod_{i=1}^{k} ik$

ここで，k を j に置き換える（特に意味はない。ik を ij としたいだけ）と，$\prod_{k=1}^{n} k^k k!=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} ij$ となる。

よって，定理はさらに次のように表せる。

> **定理（変形版５）** $\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} ij=(n!)^{n+1}$

具体例を示す。$n=3$ のとき

$\prod_{j=1}^{3}\prod_{i=1}^{j} ij=\prod_{i=1}^{1} i\prod_{i=1}^{2} 2i\prod_{i=1}^{3} 3i=1\cdot(2\cdot 4)\cdot(3\cdot 6\cdot 9)=1296$

$(3!)^4=6^4=1296$ である。

一般には，$\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} ij=\prod_{i=1}^{1} i\prod_{i=1}^{2} 2i\prod_{i=1}^{3} 3i\cdots\cdots\prod_{i=1}^{n} ni$
$=1\cdot(2\cdot 4)\cdot(3\cdot 6\cdot 9)\cdot\cdots\cdot(n\cdot 2n\cdot 3n\cdot\cdots\cdot n^2)$

であるから，

$1\cdot(2\cdot 4)\cdot(3\cdot 6\cdot 9)\cdot\cdots\cdot(n\cdot 2n\cdot 3n\cdot\cdots\cdot n^2)=(n!)^{n+1}$

である。

よって，次の変形版６を得る。

> **定理（変形版６）** n が自然数のとき，
> $1\cdot(2\cdot 4)\cdot(3\cdot 6\cdot 9)\cdot\cdots\cdot(n\cdot 2n\cdot 3n\cdot\cdots\cdot n^2)$
> $=(n!)^{n+1}$

§3. まとめ

n^n と $n!$ の間にはどのような関係があるかについて考察した。k^k と $k!$ の積 $k^k k!$ について $k=1$ から $k=n$ まで掛け合わせると $(n!)^{n+1}$ になるという結果については，きれいな形にまとめられたのではないかと思う。

（山口県立岩国高等学校）