4 辺が与えられた四辺形

さかもと　しげる
坂本　茂

§1. 四辺形

四辺形 ABCD において 4 辺 DA，AB，BC，CD の長さがそれぞれ，a，b，c，d で与えられているものとする。四辺形ができるための条件は

$$b+c+d>a,\ c+d+a>b,\ d+a+b>c,\ a+b+c>d$$

を満たさなければならない。いま四辺形の周の半分を s として

$$2s=a+b+c+d$$

とおけば，この条件は

$$s>a,\ s>b,\ s>c,\ s>d \qquad ①$$

と表される。

> 4 辺がそれぞれ与えられた四辺形で円に内接するものがただ 1 つ存在する

《証明》　a より大きい辺がなく，$a \geqq b$，c，d としても一般性は失わない。このとき四辺形 ABCD ができるための条件は $s>a$ で十分である。なぜなら，この式に $a \geqq b$ を加えて $s>b$ を得るが，他も同様で①が成り立つ。ここで $b+c+d>a$ から

$$0 \leqq a-b<c+d$$

であるが，両辺正であるから 2 乗して

$$(a-b)^2<(c+d)^2$$

$$a^2+b^2-c^2-d^2<2(ab+cd)$$

また，$|c-d|<a<a+b$ であるから 2 乗して

$$-2(ab+cd)<a^2+b^2-c^2-d^2$$

2 式の両辺を正数 $2(ab+cd)$ で割り

$$-1<\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}<1$$

これより，次の式を満たす角 α が $0<\alpha<\pi$ の範囲に 1 つ存在する。

$$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \qquad ②$$

したがって以下の式を得る。

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2+2cd\cos\alpha \qquad ③$$

四辺形 ABCD で $\theta=\angle\mathrm{DAB}$ その対角 $\varphi=\angle\mathrm{BCD}$ とする。辺 BD は △DAB，△BCD の共通辺で余弦定理から次式が成り立つ。

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta=c^2+d^2-2cd\cos\varphi \qquad ④$$

いま $0<\theta<\pi$ であるが θ を②の α に選べば③から

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta=c^2+d^2+2cd\cos\theta$$

である。四辺形 ABCD が決定するためには，角 θ の対角 φ が定まらなければならないが，このときこれと④から $\cos\varphi=-\cos\theta$ が成り立ち，$0<\varphi<\pi$ であるので $\varphi=\pi-\theta$ となる。すなわち②式で定まる角 $\theta=\alpha$ によって

$$\theta+\varphi=\pi \qquad ⑤$$

を満たす $\angle\mathrm{A}=\theta$，$\angle\mathrm{C}=\varphi$ が決定する。したがって，四辺形の対角の和が 2 直角となるので，円に内接する四辺形 ABCD が存在する。

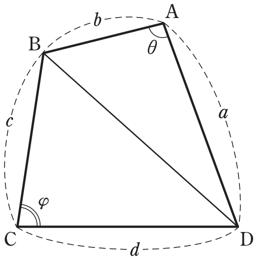
もし，円に内接する四辺形が他に存在して $\theta'=\angle\mathrm{A}=\pi-\angle\mathrm{C}$ であるとすると

$$\mathrm{BD}^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta'$$
$$=c^2+d^2-2cd\cos(\pi-\theta')$$

が成り立つ。これより

$$\cos\theta'=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)},\quad 0<\theta'<\pi$$

であるから，②より $\theta'=\alpha$ となる。すなわち，4 辺が与えられて円に内接する四辺形 ABCD はただ 1 つである。[証終]　■



次に，周の長さが与えられた多角形で面積が最大となるものは正多角形であるが，4 辺がそれぞれ与えられた四辺形で面積が最大になるものを調べる。

> 4 辺の長さがそれぞれ与えられた四辺形の面積は，円に内接するとき最大となる。

《証明》 四辺形 ABCD の面積を S とすると $S=\triangle\mathrm{DAB}+\triangle\mathrm{BCD}$ より

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}cd\sin\varphi \qquad ⑥$$

である。ここで θ が変化すれば φ も変化する。⑥において S を θ で微分すると

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{1}{2}ab\cos\theta+\frac{1}{2}cd\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{d\theta} \qquad ⑦$$

また，④を θ で微分して

$$2ab\sin\theta=2cd\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{d\theta} \qquad ⑧$$

したがって，⑦，⑧より

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta}&=\frac{1}{2}ab\cos\theta+\frac{1}{2}ab\cos\varphi\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\\&=\frac{ab}{2\sin\varphi}(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi)\\&=\frac{ab}{2\sin\varphi}\sin(\theta+\varphi)\end{aligned}$$

となる。ここで $0<\theta+\varphi<2\pi$ であり，$\frac{dS}{d\theta}=0$ となるのは，⑤ $\theta+\varphi=\pi$ が成り立つときである。実際，⑤式が成り立つときが存在することは証明されていて，このとき面積 S は最大となる。すなわち，4 辺が与えられた四辺形 ABCD の面積は，円に内接するとき最大である。[証終] ■

四辺形 ABCD が円に内接するとき⑤ $\varphi+\theta=\pi$ であるから，④式により

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \qquad ⑨$$

である。これより

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=a^2+b^2-2ab\cos\theta\\&=\frac{cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)}{ab+cd}\\&=\frac{bc(ac+bd)+da(ac+bd)}{ab+cd}\\&=\frac{(bc+da)(ac+bd)}{ab+cd}\end{aligned}$$

AC^2 も同様で，四辺形 ABCD の 2 対角線

$$\mathrm{BD}=\sqrt{\frac{(bc+da)(ac+bd)}{ab+cd}},$$

$$\mathrm{AC}=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+da}} \qquad ⑩$$

を得ることができる。これから $\mathrm{BD}\times\mathrm{AC}=ac+bd$ となるが，対角線の積は対辺の積の和である (Ptolemaios) ことがわかる。

円に内接する四辺形 ABCD の面積 S は⑤，⑥から

$$S=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\theta \qquad ⑪$$

で S^2 を⑨を用いて変形し

$$\begin{aligned}S^2&=\frac{1}{4}(ab+cd)^2(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)\\&=\frac{1}{16}(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)\\&\qquad\times(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)\\&=\frac{1}{16}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\\&=\frac{1}{16}(c+d-a+b)(c+d+a-b)\\&\qquad\times(a+b-c+d)(a+b+c-d)\end{aligned}$$

となるが，$2s=a+b+c+d$ とおいて s を四辺形の半周としたから，4 辺の長さが決まった四辺形 ABCD の面積の最大値 S は，円に内接するとき次式で与えられる。

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

(Brahmagupta) ⑫

相加・相乗平均の不等式により

$$S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\leqq\left(\frac{s}{2}\right)^4$$

で等号は正方形のとき成り立ち，面積最大である。

四辺形 ABCD が内接する円の半径 R を $\triangle\mathrm{DAB}$ に対する正弦定理と⑪から求めると

$$R=\frac{1}{2\sin\theta}\mathrm{BD}=\frac{ab+cd}{4S}\mathrm{BD}$$

となって，⑩により以下の式を得る。

$$R=\frac{1}{4S}\sqrt{(ab+cd)(bc+da)(ac+bd)}$$

また S，R は a，b，c，d の対称式であるが

$$k_1=abcd,\ k_2=a^2+b^2+c^2+d^2,$$

$$k_3=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2},\ k_4=a^4+b^4+c^4+d^4$$

とおくと S，R は以下のように表される。

$$S=\frac{\sqrt{8k_1+k_2{}^2-2k_4}}{4},$$

$$R=\sqrt{\frac{k_1(k_2+k_1k_3)}{8k_1+k_2{}^2-2k_4}}$$

4 辺が a，b，c，d の四辺形は 4 の数珠順列より $abcd$，$abdc$，$acbd$ の 3 種の四辺形が考えられる。

これらが円に内接するとき，円の半径Rは同じで，内接四辺形の面積Sの値も同じである。

§2. 三角形

四辺形 ABCD の頂点 D が A に近づいて △ABC に近づくとき，円に内接する四辺形の面積公式⑫で面積Sは $d=0$ として

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{(Heron)} \quad ⑬$$

となる。実際，これは辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれb，c，aとした △ABC の面積Sを与える式で $a+b+c=2s$ であって，sは周の半分である。△ABC において $\theta=\angle\mathrm{CAB}$ とし

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\quad S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

が成り立つが，これは⑨，⑪式において $d=0$ としたものである。したがって，Sの導出⑬式は，上記⑫式の円に内接する四辺形の面積計算とまったく同じもので，$d=0$ として辿ることができる。

Heron の公式にそのまま相加・相乗平均の不等式を考えても，$4S<s^2$ しか得られないのであるが，$\dfrac{S^2}{s}=(s-a)(s-b)(s-c)$ とし適用すれば

$$\sqrt[3]{\frac{S^2}{s}}\leqq\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}=\frac{s}{3}$$

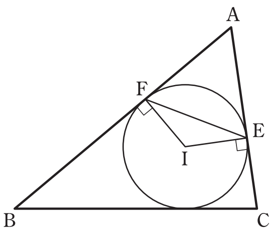
であるから $S\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{9}s^2$ が成り立つ。等号は正三角形のときである。周の半分sを用いて表せるものを調べると，まず三角比が

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$
$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

となり，△ABC の内接円が辺 AC，AB で接する点をそれぞれ E，F とし内心を I とすれば

$$\mathrm{AI}=bc\frac{s-a}{s},\quad \mathrm{EF}=2(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

である。



> △ABC の面積を 2 等分する線分を考えると最短の線分の長さは
> $$\sqrt{2(s-b)(s-c)} \quad (b\geqq a,\ c\geqq a)$$

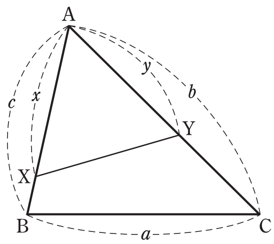
《証明》 2 辺 AB，BC 上にそれぞれ点 X，Y を取り，$\triangle\mathrm{AXY}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$ のとき

$$\frac{1}{2}xy\sin A=\frac{1}{4}bc\sin A,\quad x=\mathrm{AX},\quad y=\mathrm{AY}$$

より $2xy=bc$ である。余弦定理で

$$\begin{aligned}\mathrm{XY}^2&=x^2+y^2-2xy\cos A\\&=(x-y)^2+2xy(1-\cos A)\\&\geqq 2xy(1-\cos A)\\&=bc\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\\&=\frac{1}{2}(2bc-b^2-c^2+a^2)\\&=\frac{1}{2}(a-b+c)(a+b-c)=2(s-b)(s-c)\end{aligned}$$

すなわち $x=y=\sqrt{\dfrac{bc}{2}}$ のとき最小になる。他の 2 辺上で 2 等分するときも同様であるが，b，$c\geqq a$ であるからこれが最短の長さである。[証終] ■



なお，$\triangle\mathrm{AXY}=\dfrac{1}{n}\triangle\mathrm{ABC}$ とするような最短の線分 XY の長さは次式である。

$$2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{n}},\quad x=y=\sqrt{\frac{bc}{n}}$$

Heron の公式から，周長$2a$が与えられたときは，正三角形が面積最大であることがいえた。半径Rの定円に内接する △ABC についてはどのようにいえるだろうか。3 辺a，b，cに対する円周角はそれぞれA，B，Cで，中心角は$2A$，$2B$，$2C$であるから，面積Sは角で表し

$$\begin{aligned}S&=\frac{R^2}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)\\&=2R^2\sin A\sin B\sin C\end{aligned}$$

となる。

> $A+B+C=\pi$ の条件で $A=B=C$ のとき，S は最大である。

《証明》 Aを固定して次の不等式

$$
\begin{aligned}
S&=2R^2\sin A\sin B\sin C\\
&=R^2\sin A\{\cos(B-C)-\cos(B+C)\}\\
&=R^2\sin A\{\cos(B-C)+\cos A\}\\
&\leqq R^2\sin A(1+\cos A)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，等号は $B=C$ のとき成り立つ。したがって，頂角Aの三角形の面積を最大にするのは二等辺三角形のときである。これはA，B，Cどれを頂点と考えても二等辺三角形が面積最大といえるから，正三角形のとき面積最大である。

実際，$B=C$ の二等辺三角形の面積

$$S=R^2\sin A(1+\cos A),\ 0<A<\pi$$

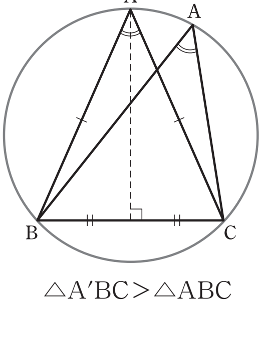
が最大値をとるときはAで微分し，

$$\frac{dS}{dA}=R^2(2\cos A-1)(\cos A+1)$$

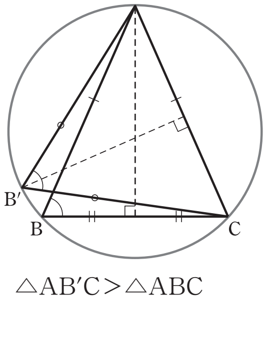
であり $\cos A=\dfrac{1}{2}$ のとき最大となることがわかり，このとき $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ である。すなわち同じ円に内接する三角形では正三角形が面積最大である。

［証終］ ■

以上は次のような図形における推論で示唆された。円に内接する三角形において面積が最大であるのは正三角形ではないとすると，面積最大なのは3辺が異なる三角形か，あるいは2辺だけ等しい二等辺三角形である。3辺が異なる三角形の場合にある1辺を底辺として円周上で頂点を（同じ側で底辺の垂直2等分線上に）動かし二等辺三角形を作る（円周角の定理より頂角の値は変わらない）と，高さが大きくなりもとの三角形より面積は大きい。二等辺三角形の場合においても，2等辺の1辺を底辺として頂点を円周上で動かし別の二等辺三角形を作れば，高さが大きくなるので面積は大きくなる。すなわち，正三角形でない三角形では，面積がそれより大きな二等辺三角形が存在し面積最大とはいえない。したがって，円に内接する三角形で面積最大となるのは正三角形である。



$\triangle$A′BC＞$\triangle$ABC



$\triangle$AB′C＞$\triangle$ABC

定円に外接する $\triangle$ABC においても，角Aを固定すれば $B=C$ の二等辺三角形のとき面積が最小になることが図形でわかる。これは角B，Cを固定したときも同じことがいえるので，定円に外接して面積が最小となるのは正三角形である。

実際，半径rの円に外接する $\triangle$ABC の面積Sは，角で表すと次のようになる。

$$S=rs=r^2\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

> $A+B+C=\pi$ の条件で $A=B=C$ のとき，S は最小である。

《証明》 A，B，C それぞれの半径を α，β，γ とおき

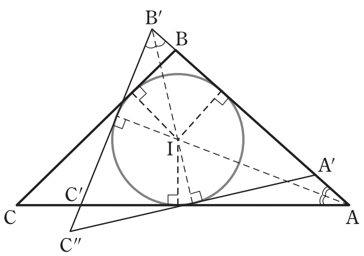
$$
\begin{aligned}
S&=r^2(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)\\
&=r^2\left(\cot\alpha+\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}\right)\\
&=r^2\left(\cot\alpha+\frac{2\cos\alpha}{\cos(\beta-\gamma)-\sin\alpha}\right)\\
&\geqq r^2\left(\cot\alpha+\frac{2\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

等号は $\beta=\gamma$ すなわち $B=C$ の二等辺三角形のときである。このとき

$$\frac{dS}{d\alpha}=r^2\cot^2\alpha\cdot\frac{2\sin\alpha-1}{(1-\sin\alpha)^2}$$

となり，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ のときSは最小になる。すなわち $A=B=C$ で正三角形のとき，定円に外接する三角形の面積は最小になる。［証終］ ■

以上は大学入学後に考え，本の余白に書いておいた最大・最小問題をまとめたものである。



$\triangle$ABC＞$\triangle$AB′C′＞$\triangle$A′B′C″＞…

（元東京都立高等学校）