言葉で伝える難しさ

竹内(たけうち)　憲治(けんじ)

§1. はじめに

先日，文学部２回生の卒業生からこんな質問を受けた。(いや，“試された”か)
彼女は黙って
「$a+\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a+b}$」
と書いてこう言った。
「この２つの式を言葉で伝えるとき，どうやって区別するでしょうか？」
最初，どういうことかわからず，
「えっ？　$a+\frac{c}{b}$ と $\frac{c}{a+b}$ を？」
「あっ！」
と言葉にして初めて彼女の問いに気づいた。私が声に発したときの２式は同じ発音だったのだ。

実は私は，この手の問題にいつも直面していた。今時ケータイもメールもしない私が，他校の先生と連絡を取る手段は専ら電話であった。その際に「そう言えば，こんな面白い問題を見つけたよ」と互いに伝え合おうとするのだが，電話だと「えっ？　分母は何？」とか「その係数はどこまでかかってるの？」などと聞き合うことが多い。「書けばすぐに伝わるのに〜」と，とても歯がゆい思いをするのだ。

よく考え直した私は
「$a+$(間(ポーズ)) $\frac{c}{b}$」と「$a+b$ (間) 分の c」
と言い，彼女は「まあ，いいかな」と笑顔で答えてくれた。

正解に安堵した私は，電話ではこんなふうに言うよ，と伝えてみた。
「$a+\frac{c}{b}$」は，「今から多項式を言います。
第１項が a で，第２項が $\frac{c}{b}$ です。」
「$\frac{c}{a+b}$」は，「今から分数を言います。
分母が $a+b$ で，分子が c です。」

「ふ〜ん」彼女は眠そうな顔をした。「$\frac{c}{b}$ は単項式じゃないよ！」というツッコミもなく。

§2. 国語的に見た数学

「$a+\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a+b}$」を区別するには，ポーズ (間) とイントネーション (抑揚) が大切であると彼女は続けた。
「$\frac{c}{a+b}$ は『$a+b$ 分の (揚) c』でもいいよ」

数学の授業は「板書」と「言葉」で展開されるのに，板書や解法の研究は行っても，言葉についてはほとんど考えてこなかった自分に気づかされた。

確かに「$\vec{a}$」は「ベクトル a」なのか「a ベクトル」かなどは度々同僚と議論した。最近では「どちらでもよい」らしいが，初老の私としてはやはりベクトルは「属性」なので，「自然数 n」「関数 $f(x)$」らと同様に「ベクトル a」を推したい。ついでながら「零行列」も「れいぎょうれつ」であって「ぜろぎょうれつ」ではない。「零」という漢字に「ぜろ」という読みはないのだ。

どんなに美しい証明も〆の言葉「よって〜が成立」の「成」の字の書き順が「ノ」からでなければ最後の最後でガッカリしてしまう。

§3. $a+\frac{c}{b}$ と $\frac{c}{a+b}$ の大小比較

教え子に教えられた私は，しばし彼女の話に耳を傾けた。言葉遣いが丁寧でよく内容が伝わる。「さすが文学部」と感心すると同時に「唯でさえわかりにくい数学なのに，言葉まで伝わらなければさらにわからないだろう」と自身を反省した。

しかし反省しながらも思うことが一。それはこの２式を見た大半の数学の教員が考えることだろう。それは次の問題だ。

【問題１】 $a+\dfrac{c}{b}$ と $\dfrac{c}{a+b}$ の大小を比べよ。

話し終わった彼女にこの問題を出して名誉の挽回を図ったのだが，差をとって悩む彼女に続いて私も悩むことになる。それから約 10 分間が経過。

私：「あっ，わかった！」
卒：「本当ですか？」
私：「うん，これはかなり面倒な答えになる」
私：「だから“すぐには解けない”とわかった」
卒：「ふ〜ん (軽視される)」

あれから１カ月，そのままにされていた紙切れを眺めながらあの日を振り返ってこの問題を解いてみると，本当に面倒な答えになった。

(解答) 差をとると

$$\left(a+\frac{c}{b}\right)-\frac{c}{a+b}=a+\left(\frac{c}{b}-\frac{c}{a+b}\right)$$
$$=a+\frac{ac}{b(a+b)}$$
$$=a\cdot\left\{1+\frac{c}{b(a+b)}\right\} \quad \cdots①$$

今 $b\neq0$，$a+b\neq0$ より，$b^2(a+b)^2>0$ であるから，①の正負と ①$\times b^2(a+b)^2$ の正負は一致する。よって

$$①\times b^2(a+b)^2=ab(a+b)\{b(a+b)+c\} \quad \cdots②$$

を，文字 c を定数として，ab 平面で考える。
厄介なのは曲線 $b(a+b)+c=0$ である。

$$b(a+b)+c=0 \Longleftrightarrow ab+b^2+c=0 \quad \cdots③$$

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ とすれば，

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$$

これを③に代入して

$$(A\cos\theta+B\sin\theta)(-A\sin\theta+B\cos\theta)$$
$$+(-A\sin\theta+B\cos\theta)^2+c=0$$
$$\Leftrightarrow (\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)A^2+(\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)B^2$$
$$+(-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta)AB+c=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos2\theta}{2}-\frac{\sin2\theta}{2}\right)A^2+\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{2}\right)B^2$$
$$+(-\sin2\theta+\cos2\theta)AB+c=0 \quad \cdots④$$

ここで AB の項を消すためには

$$-\sin2\theta+\cos2\theta=0$$
$$\Leftrightarrow \sin2\theta-\cos2\theta=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

から，$\theta=\dfrac{\pi}{8}$ が良い。このとき④は

$$\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)A^2+\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)B^2+c=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{2}}{2}A^2+\frac{1+\sqrt{2}}{2}B^2+c=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{2}A^2-\frac{\sqrt{2}+1}{2}B^2=c$$

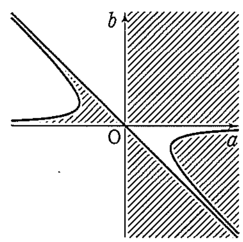
これは $c\neq0$ のとき双曲線，$c=0$ のとき２直線を表す。
双曲線の漸近線の方程式は

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}A^2-\frac{\sqrt{2}+1}{2}B^2=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}A\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}B=0$$
$$\Leftrightarrow B=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}A$$
$$\Leftrightarrow B=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}A$$
$$\Leftrightarrow B=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}A$$
$$\Leftrightarrow B=\pm\left(\tan\frac{\pi}{8}\right)A$$

であるから，$\dfrac{\pi}{8}$ の回転変換であったことを考え合わせると，双曲線 $b(a+b)+c=0$ の漸近線の方程式は，a 軸と直線 $b=-a$ である。
さあ，②について領域を図示してみよう。

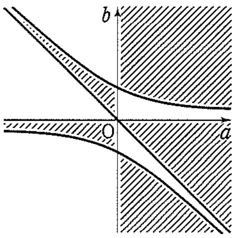
(I) $a+\dfrac{c}{b}>\dfrac{c}{a+b}$ となるのは，②が $ab(a+b)\{b(a+b)+c\}>0$ のときであり，図示すれば

(I・1) $c>0$ のとき



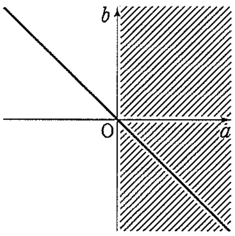
(ただし，境界は含まない)

(I・2)　$c<0$ のとき



（ただし，境界は含まない）

(I・3)　$c=0$ のとき



（ただし，境界は含まない）

(II)　$a+\dfrac{c}{b}<\dfrac{c}{a+b}$ のとき，

(III)　$a+\dfrac{c}{b}=\dfrac{c}{a+b}$ のときも同様である。　■

(注)　漸近線の傾き

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\tan\frac{\pi}{8}$$

を求める部分がしつこかったかもしれない。私の世代では暗記事項であったものだ。この変形は有名で，例えば

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

と書けば見やすいが，具体的に書かれると困るというパターンである。

そう言えば私が高校生だった頃は「sin3° の値を求めよ」なんて問題もあったなー。

§4. おわりに

「言葉で伝える難しさ」をかみしめていたある日の放課後に，生徒が次の問題を持ってきた。

> **【問題2】**　文章が成立するように空欄を補充せよ。ただし，上下の $\boxed{\text{A}}$ と，上下の $\boxed{\text{B}}$ には，同じものが入る。
> (1)　$\boxed{\text{A}}$ は $\boxed{\text{B}}$ である。
> (2)　$\boxed{\text{A}}$ は $\boxed{\text{B}}$ ではない。

生徒は答えを知っていて，私ができるかどうかを試したようだ（また試されている！）。

問題を一見して思ったことは「あれ？　そんなはずはない。『有りかつ有らぬ，それは不可能である』とギリシアの哲学者パルメニデスも言ったじゃないか。それにこれが成り立つならば，数学の背理法とかが怪しいものになってしまう。」

詳しくは知らないけれど「自己言及の命題はパラドックスを生じることがある」と聞いたことがあるから多分その類ではないかと思うも，結局わからずに，答えは生徒から教えてもらった。

(解答)

$\boxed{\text{A}}$＝この文章，$\boxed{\text{B}}$＝１行目

こうして考えると「言葉」には数学を超えたさらなる可能性が感じられる。

とはいえ数学には数学の良さがあり，数学用語なしに方程式や関数的なものを論じることはできない。

したがって数学的内容はもとより，授業で語られる言葉を精選した上で，ゆっくりと丁寧に話すことが肝要だろう。進度を稼ごうとしていつも早口になりがちな自分への戒めでもある。

話を電話まで戻そう。電話で伝わるのは「言葉」である。だから電話で上手に伝えられる訓練を積めば，数学の授業も上達するのでは，と一瞬思うけれどそんなことを言うと生徒たちが授業中にケータイをつつきかねないので“思うだけ”にしておく。

「言葉」だけでは伝わりにくいものが数学以外にもあと２つある。人生で１度だけ経験があるが，まずは「折り紙の折り方」。これは折り紙なしには絶対に伝わらないと断言したい。“元折り紙クラブ”の私が，電話である１つの折り紙を伝えるのに１時間かかったことがある。

あともう１つ。それは「人の気持ち」。電話では決してうまく伝えられません。

生徒たちの会話を聞いていると，メールがすぐに返ってこなければ脈がないとか，３回連続で返らなければお別れとかー。

文章では伝えられないもの，言葉では伝わらないものがたくさんあります。特に人間関係はそうでしょう。「心」は数学と違い，論理では片づきません。

「あいたい」も，「逢いたい」のか「あっ，痛い」なのか。まあ恋愛であれば，そのどちらも同時にあ

りえるけれど。

(補) せっかくなので§3の最後の問いも略解しておきます。

【問題3】 $\sin 3°$ の値を求めよ。

(解答) $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ より

$$\cos 18°=\frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}$$

また

$$\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\quad \cos 15°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\therefore\ & \sin 3° \\ &=\sin(18°-15°) \\ &=\sin 18°\cos 15°-\cos 18°\sin 15° \\ &=\cdots\cdots \\ &=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}\end{aligned}$$ ■

《参考文献》

〔1〕 問題解法 三角法辞典 聖文社

(鳥取県立鳥取工業高等学校)