数表を楽しむ
―ゼータ関数表を題材にして―

西元(にしもと)　教善(のりよし)

§1. はじめに

教科書の巻末には取扱い内容に関する数表が掲載されている。平方・平方根・逆数表，三角比（三角関数）の表，正規分布表，乱数表などである。

三角比の表を眺めると，三角比の性質である $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$ は理屈抜きに成り立つと思えてしまう。

表から一般的な性質が読み取れるものは面白い。一見雑然と並ぶ数字の列から数学的な性質が忽然と浮かび上がってきて，「あっ！」思わず膝を打つ瞬間があるからである。生徒たちはこのような表を眺めることがあるのだろうか。そこに何か自分なりの発見をしたことはあるのだろうか？　もしそうだったら数学がもっと好きに，楽しく学べるのでは？と思う。

本稿では，私が経験した例を紹介したいと思う。それはゼータ関数表を眺めていた時のことである。

§2. ゼータ関数表

数学辞典には，（個人的に）興味を惹くものからそれほどではないものまで，いろいろな数表が掲載されている。

1900年にヒルベルトが「23の難問」の一つとし，2000年の世界数学者会議では「７つの未解決問題」として100万ドルの懸賞金の賭けられたミレニアム問題である「リーマン予想」というのがあるが，それについて大衆向けに書かれた「リーマン博士の大予想（カール・サバー著，黒川信重監修，南條郁子訳，紀伊國屋書店）を読んでいたとき，その中核ともいえるゼータ関数 $\zeta(s)$（s は複素数）の s が整数の場合の数表（ゼータ関数，新数学辞典 p.969，大阪書籍）を何気なく眺めた。

それは表１のような $n=2$ から $n=20$ までのゼータ関数 $\zeta(n)$ の値（小数第45位まで）が書き並べられたものであった。よく知られているように $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}\fallingdotseq1.6449$ であり，$\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}\fallingdotseq1.0823$ である。

n	$\zeta(n)$
2	1. 644934066848226436472415166646025189218949901
3	1. 202056903159594285399738161511449990764986292
4	1. 082323233711138191516003696541167902774750951
5	1. 036927755143369926331365486457034168057080919
6	1. 017343061984449139714517929790920527901817490
7	1. 008349277381922826839797549849796759599863560
8	1. 004077356197944339378685238508652465258960790
9	1. 002008392826082214417852769232412060485605851
10	1. 000994575127818085337145958900319017006019531
11	1. 000494188604119464558702282526469936468606435
12	1. 000246086553308048298637998047739670960416088
13	1. 000122713347578489146751836526357395714275105
14	1. 000061248135058704829258545105135333747481696
15	1. 000030588236307020493551728510645062587627948
16	1. 000015282259408651871732571487636722023237389
17	1. 000007637197637899762273600293563029213088249
18	1. 000003817293264999839856761644621939730754697
19	1. 000001908212716553938925656957975101353258571
20	1. 000000953962033872726113152038683449345943794

〔表１〕

§3. ゼータ関数表からの予想

この表を眺めていれば，数列 $\{\zeta(n)\}$ は単調減少であるとか，極限については $\zeta(n)\to1\,(n\to\infty)$ という予想が即座に立てられるし，さらには小数点以下の

0.64493……，0.20205……，0.08232……，
0.03692……，0.01734……，0.00834……

を順に足していくと，

0.64493……，0.84698……，0.92930……，
0.96622……，0.98356……，0.99188……

となるから，恐らくそれは１に近づくのではないか，つまり $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}=1$ という予想も立てられる。

表１には，$\zeta(n)$ についてのデータはわずか19個しかないが，$\zeta(n)$ の小数部分 $\zeta(n)-1$ について，$n=2$ から $n=20$ までの和を計算してみた。

なお，エクセルでは小数点以下45位までは通常では処理できないので，「十進プログラム」(これはブルーバックス「パソコンを遊ぶ 簡単プログラム(木村良夫著)」に添付されたソフト)で計算した。これには10進法1000桁ボタンというのがあり，有効数字1000桁で計算してくれるので，これで計算した。

すると，0.9999990461……という結果になり，

$\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}=1$ という予想に確信をもった。

すると，次に $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)-1}{n}$ はどうなるのか，

$\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}=1$ であるから，$0<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)-1}{n}<1$ は当然であろう，ではその値はいくらになるのかということに興味が湧いたので，同様に $\frac{\zeta(n)-1}{n}$ について $n=2$ から $n=20$ までの和を「十進プログラム」で計算してみた。

0.4227842915828567482626526294 81…… という結果が出たが，私には馴染みのない結果であった。しかし，1からこれを引いたもの，つまり

$1-\sum_{k=2}^{20}\frac{\zeta(n)-1}{n}$ を計算してみると，0.<u>577215</u>70841714325173734…… であり，これが**オイラーの定数**

$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=0.\underline{577215}6649$ …… に近いことに気付いた。

結局，私としてはゼータ関数表を眺めていて，

見れば即座にできる予想1

$\lim_{n\to\infty}\zeta(n)=1$

少し念入りに見ればできる予想2

$\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}=1$

少しのひらめきの必要な予想3

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)-1}{n}=1-\gamma$ (γはオイラーの定数)

という3つの予想が立てられた。

§4. 予想式の証明

(1) $\lim_{n\to\infty}\zeta(n)=1$ について

$\zeta(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$ であるから，まず $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^n}$ について評価式を作る。そのため，次の補題を証明する。

> **補題1**　k，n を自然数とするとき，
> $n\geqq k\geqq 3$ ならば，$k^n\geqq n^k$ である。

【証明】 まず，次のような同値変形をする。

$$k^n\geqq n^k \Longleftrightarrow n\log k\geqq k\log n$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\log n}{n}\leqq\frac{\log k}{k}\quad\cdots①$$

ここで，$f(x)=\frac{\log x}{x}$ $(x\geqq 3)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}<0\ (\because x\geqq 3>e)$$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 3$ で単調減少である。

ゆえに，$n\geqq k\geqq 3$ のとき $f(n)\leqq f(k)$

したがって，$\frac{\log n}{n}\leqq\frac{\log k}{k}$ となり，

①より $k^n\geqq n^k$ である。■

$\lim_{n\to\infty}\zeta(n)=1$ の証明

【証明】 補題1から，$\frac{1}{k^n}\leqq\left(\frac{1}{n}\right)^k$ $(3\geqq k\leqq n)$

である。すると，$N>n$ (Nは自然数)のとき，

$1\leqq l\leqq N-n$ である自然数 l に対し，$n+1\leqq n+l\leqq N$ であり，このとき，二項定理から

$$(n+l)^n=n^n+{}_n\mathrm{C}_1n^{n-1}l+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}nl^{n-1}+l^n$$
$$>{}_n\mathrm{C}_{n-1}nl^{n-1}=n^2l^{n-1}$$

である。

よって，$\frac{1}{(n+l)^n}<\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{l^{n-1}}$ となるから

$N\geqq n\geqq k\geqq 3$ のとき

$$1+\frac{1}{2^n}<\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^n}\leqq 1+\frac{1}{2^n}+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^k+\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{N-n}\frac{1}{l^{n-1}}$$
$$=1+\frac{1}{2^n}+\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3\left\{1-\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2}\right\}}{1-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{N-n}\frac{1}{l^{n-1}}$$
$$<1+\frac{1}{2^n}+\frac{n^{n-2}-1}{n^{n+1}-n^n}+\frac{1}{n^2}\zeta(n-1)$$

である。

よって，$N\to\infty$ とすると $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^n}\to\zeta(n)$ であるから

$$1+\frac{1}{2^n}<\zeta(n)<1+\frac{1}{2^n}+\frac{n^{n-2}-1}{n^{n+1}-n^n}+\frac{1}{n^2}\zeta(n-1)\cdots①$$

を得る。これより荒い評価になるが，

$$1+\frac{1}{2^n}<\zeta(n)<1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n^3-n^2}+\frac{2}{n^2}\cdots②$$

実際，$\lim_{n\to\infty}\zeta(n)=1$ を示すには②で十分である。

というのは，②において，$n\to\infty$ とすると

$1+\frac{1}{2^n}\to 1$，$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n^3-n^2}+\frac{2}{n^2}\to 1$ となり，

はさみうちの原理から，$\lim_{n\to\infty}\zeta(n)=1$ となるからで

ある。■

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}=1$ について

まず，次の補題2を証明する。

> 補題2　n，N を自然数とするとき，$N\geqq n\geqq 2$ ならば，
> $$\zeta(n)-1<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots+\frac{1}{N^n}+\frac{1}{N^{n-1}}$$
> である。

【証明】

$$\zeta(n)-1=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots+\frac{1}{N^n}+\frac{1}{(N+1)^n}+\cdots$$

であるから，$\dfrac{1}{(N+1)^n}+\cdots<\dfrac{1}{N^{n-1}}$ を示せばよい。

l を自然数として，次のように表せる。

$$\zeta(n)-1=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots+\frac{1}{N^n}+\frac{1}{(N+1)^n}+\cdots+\frac{1}{(N+l)^n}+\cdots$$

ここで，$L=\left[\dfrac{l}{N}\right]+1$ （ただし，$[x]$ は x を超えない最大整数）とおくと，$l<LN$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(N+1)^n}+\cdots+\frac{1}{(N+l)^n}\\
&<\frac{1}{(N+1)^n}+\cdots+\frac{1}{(N+l)^n}+\cdots+\frac{1}{(N+LN)^n}\\
&=\frac{1}{N^{n-1}}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{LN}\frac{1}{\left(1+\dfrac{k}{N}\right)^n}\\
&<\frac{1}{N^{n-1}}\int_0^L\frac{dx}{(1+x)^n}\\
&=\frac{1}{N^{n-1}}\cdot\frac{1}{-n+1}\left[\frac{1}{(1+x)^{n-1}}\right]_0^L\\
&=\frac{1}{N^{n-1}}\cdot\frac{1}{n-1}\left\{1-\frac{1}{(L+1)^{n-1}}\right\}\\
&<\frac{1}{N^{n-1}}
\end{aligned}$$

ここで $l\to\infty$ として　$\dfrac{1}{(N+1)^n}+\cdots<\dfrac{1}{N^{n-1}}$

よって，

$$\zeta(n)-1<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots+\frac{1}{N^n}+\frac{1}{N^{n-1}}\quad ■$$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}=1$ の証明

【証明】　補題2から

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}&\leqq\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots+\frac{1}{N^n}+\frac{1}{N^{n-1}}\right)\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\cdots+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{N^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{N^{n-1}}\\
&=2\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{N}{N-1}\cdot\frac{1}{N^2}+\frac{N}{N-1}\cdot\frac{1}{N}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(N-1)N}+\frac{1}{N-1}\\
&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\right)+\frac{1}{N-1}\\
&=1-\frac{1}{N}+\frac{1}{N-1}\\
&=1+\frac{1}{N(N-1)}
\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}\leqq1+\frac{1}{N(N-1)}$ …… ①

また，明らかに $\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}+\cdots+\dfrac{1}{N^n}<\zeta(n)-1$

であるから

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots+\frac{1}{N^n}\right)\leqq\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}$$

であり，

上の途中計算から，わかるように

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots+\frac{1}{N^n}\right)=1-\frac{1}{N}$ であるから

$$1-\frac{1}{N}\leqq\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}\ \cdots\cdots ②$$

①，②より，2以上の自然数Nについて

$$1-\frac{1}{N}\leqq\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}\leqq1+\frac{1}{N(N-1)}$$

が成り立つ。

ここで，$1-\dfrac{1}{N}\to1$，$\dfrac{1}{N(N-1)}\to1$ $(N\to\infty)$ であるから，はさみうちの原理によって，

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}=1$ である。■

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)-1}{n}=1-\gamma$ （γはオイラーの定数）

$\displaystyle\gamma=1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)-1}{n}$ であることを示せばよいが，

(2)より $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}=1$ であるから，

$$\begin{aligned}
\gamma&=\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)-1\}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)-1}{n}\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\zeta(n)+\frac{1}{n}-1\right\}\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\{\zeta(n)-1\}
\end{aligned}$$

つまり，$\displaystyle\gamma=\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\{\zeta(n)-1\}$ を示せばよい。

ここで，次の補題3を証明しておく。

> 補題3　$x>-\dfrac{1}{2}$ のとき，
>
> $$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n$$

【証明】 テーラー展開から，$|x|<1$ においては

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad \cdots\cdots ①$$

である。①で，x を $-x$ に置き換えて

$$\log(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad \cdots\cdots ②$$

次に，②で $1-x=\dfrac{1}{1+y}$ とおくと

$$②の左辺=\log\frac{1}{1+y}=-\log(1+y)$$

$x=1-\dfrac{1}{1+y}=\dfrac{y}{1+y}$ であることから

$$②の右辺=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{y}{1+y}\right)^n$$

$|x|<1$，$y=-\dfrac{1}{x-1}-1$ より $y>-\dfrac{1}{2}$

y を x に置き換えると，$x>-\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n \cdots\cdots ③$$ となる。■

$\gamma=\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\{\zeta(n)-1\}$ の証明

【証明】 ③から，k を自然数として

$$\log\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)^n$$

よって，N を自然数として，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)^n=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)^n$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)^n<\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)^n=\frac{\left(\frac{1}{k+1}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{k+1}}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)^N$$

であるから，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)^n<\log\left(1+\frac{1}{k}\right)<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)^n+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)^N \cdots\cdots ④$$

また，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}&=\frac{\frac{1}{k+1}}{1-\frac{1}{k+1}}=\frac{1}{k+1}+\left(\frac{1}{k+1}\right)^2+\left(\frac{1}{k+1}\right)^3+\cdots\\
&=\frac{1}{k+1}+\left(\frac{1}{k+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{k+1}\right)^N+\left(\frac{1}{k+1}\right)^{N+1}+\cdots\\
&=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{k+1}\right)^n+\left(\frac{1}{k+1}\right)^{N+1}+\left(\frac{1}{k+1}\right)^{N+2}+\cdots\\
&=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{k+1}\right)^n+\left(\frac{1}{k+1}\right)^{N+1}+\left(\frac{1}{k+1}\right)^{N+2}+\cdots\\
&=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{k+1}\right)^n+\frac{\left(\frac{1}{k+1}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{k+1}}\\
&=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{k+1}\right)^n+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)^N \quad \cdots\cdots ⑤
\end{aligned}$$

④，⑤より

$$\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)^l<\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)<\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)^l+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)^N$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)^l\right\}<\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}<\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)^l+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)^N\right\} \cdots\cdots ⑥$$

また，

$$\begin{aligned}
\log n&=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\cdots\frac{n}{n-1}\right)\\
&=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{n}{n-1}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\log\frac{k+1}{k}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) \quad \cdots\cdots ⑦
\end{aligned}$$

であるから，⑥，⑦より，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)^l\right\}<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\log n<\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)^l+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)^N\right\}$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)^l\right\}+\frac{1}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n<\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)^l+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)^N\right\}+\frac{1}{n} \cdots\cdots ⑧$$

ここで，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)^{l}\right\}=\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{l}$$

であるから，⑧は

$$\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{l}+\frac{1}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n$$

$$<\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{l}+\sum_{l=2}^{N}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{N}+\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots ⑨$$

⑨において，$n\to\infty$ とすると，

$$\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{l}\leqq\gamma$$

$$\leqq\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{l}+\sum_{l=2}^{N}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{N}$$

よって，

$$\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\{\zeta(l)-1\}\leqq\gamma$$

$$\leqq\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\{\zeta(l)-1\}+\sum_{l=2}^{N}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{N}$$

$\displaystyle\sum_{l=2}^{N}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{N}<\sum_{l=2}^{N}\frac{1}{k^{N+1}}=\zeta(N+1)-1$ であるから

$$\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\{\zeta(l)-1\}\leqq\gamma$$

$$\leqq\sum_{l=2}^{N}\left(1-\frac{1}{l}\right)\{\zeta(l)-1\}+\zeta(N+1)-1 \quad \cdots\cdots ⑩$$

⑩において，$N\to\infty$ とすると，

(1)より $\zeta(N+1)-1\to 0$ であるから，

$$\sum_{l=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{l}\right)\{\zeta(l)-1\}\leqq\gamma\leqq\sum_{l=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{l}\right)\{\zeta(l)-1\}$$

すなわち

$$\sum_{l=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{l}\right)\{\zeta(l)-1\}=\gamma$$

である。

ここで，l を n に置き換えると，

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\{\zeta(n)-1\}=\gamma$$

これで，

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)-1}{n}=1-\gamma$$

が証明された。■

§5. おわりに

予想は立っても，その証明が困難な問題は多い。しかし，予想しなければ何も進展しない。その予想が難しそうでも，何かの拍子に向こうから姿を現すこともある。このようにぼんやりと数表を眺めるのも決して無駄ではないと思う。

ここまでのことを生徒に要求するのは酷であるが，生徒にも予想を立てさせ，それを検証していく態度，つまり証明をする，あるいは反例を見つけることを身に付けさせる授業を展開したいと考えている。

それにしても数というのは意外な関連があるものだと再認識した。ゼータ関数が整数論の中心的役割を果たしていることを垣間見たような気がする。

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

であり，$n\to\infty$ のとき

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\to\zeta(1)=\infty,\ \log n\to\infty$$

であるから，

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\log n$$

は，$\infty-\infty$ の不定形であるが，ちゃんと極限値 γ があり，しかもゼータ関数 $\zeta(1)$ との関わりがある。

$$\gamma=\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\{\zeta(n)-1\}$$

からは，γ は 2 以上のすべての n に対する $\zeta(n)$ に関係し，

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

では $\zeta(1)$ に関係する。オイラーの定数 γ はすべての自然数 n に対するゼータ関数 $\zeta(n)$ に関係していると言えよう。

《参考文献》

〔1〕 カール・サバー (Karl Sabbagh)(黒川信重監修，南條郁子訳)，リーマン博士の大予想　数学の未解決最難問に挑む (原題 The Riemann Hypothesis The Greatest Unsolved Problem in Mathematics)，紀伊國屋書店，2004

〔2〕 一松　信 (執筆代表)，新数学辞典，大阪書籍，1979，引用したゼータ関数表は $p.969$ に掲載

〔3〕 木村良夫，パソコンを遊ぶ　簡単プログラミング CD-ROM 付　コンピュータを自由に操る「十進 BASIC」入門　ブルーバックス B−1398，講談社，2003

(山口県立岩国高等学校)