平行四辺形の中の双曲線

野田（のだ）　克司（かつし）

§1. 平行四辺形から任意の四角形を作る

任意の（凸）四角形 KLMN は，対角線にそれぞれ平行な 2 組の辺をもつ平行四辺形 ABCD から，4 隅を切り取ることによって作ることができます。ここで，点 P は四角形 KLMN の対角線の交点です。（図 1）

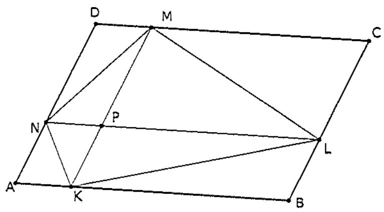

図 1

逆に，平行四辺形 ABCD 内の点 P が与えられたとき，図 1 のように 4 隅を切り取ることによって，四角形 KLMN を作ることができます。言いかえると，2 本の対角線の長さとそのなす角が同じ四角形全体は，1 つの平行四辺形の内部の点によって分類されるということを意味しています。

例えば，点 P が平行四辺形 ABCD の対角線上にあれば，四角形 KLMN は台形になり，その逆も成り立つことはただちにわかります。すなわち，四角形 KLMN が台形となるときの，点 P の軌跡は平行四辺形 ABCD の 2 本の対角線であります。特に，その交点は唯一の平行四辺形を表します。

本稿では，四角形 KLMN が円に内接する四角形となるときの，点 P の軌跡がどのようなものになるかということを考察します。使用する数学は高校程度で十分ですので，問題を少し変えれば数学A，C などの演習問題としても適当かと思います。

§2. 円に内接する四角形となる点 P の軌跡

平行四辺形 ABCD とその内部の点 P を考えます。P を通り辺 AD，AB に平行な直線と辺 AB，AD との交点をそれぞれ点 K，M，N，L，また，$AB=2a$，$AD=2b$，$AK=p$，$AN=q$，$\angle BAD=\theta$ $(0°<\theta<180°)$ とします。座標系を $A=(0,\ 0)$，$B=(2a,\ 0)$ と入れます。（図 2）

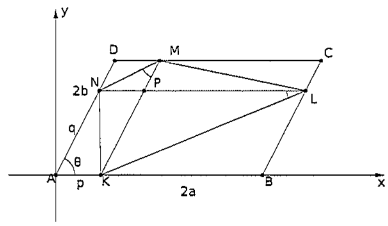

図 2

一般性を失わず $a \geqq b$ と仮定します。

四角形 KLMN が円に内接するとします。4 点 K，L，M，N が同一円周上にあることより，

$$\angle PLK=\angle PMN$$

対頂角より（これは，常に成り立つ），

$$\angle KPL=\angle NPM$$

であるから，

$$\triangle PLK \backsim \triangle PMN$$

$PK=q$，$PL=2a-p$，$PN=p$，$PM=2b-q$ より，

$$p:(2b-q)=q:(2a-p)$$

これを整理して，

$$(p-a)^2-(q-b)^2=a^2-b^2 \qquad (1)$$

逆に，p，q がこの等式を満たせば，四角形 KLMN が円に内接することは明らかです。$P(x,\ y)$ とおくと，

$$x=p+q\cos\theta \qquad y=q\sin\theta$$

これを使って，(1)を x，y の方程式に変形すると，

$$x^2-y^2-2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}xy-2ax+2\frac{a\cos\theta+b}{\sin\theta}y=0 \qquad (2)$$

(2)が求める点 P の軌跡の方程式です。

§3. 軌跡の図形的特徴

方程式(1)より，平行四辺形の 4 頂点 A，B，C，D がこの軌跡上にあることはただちにわかります。これは例えば P＝A となるとき，四角形 KLMN はその極限として，三角形 ABD に一致すると考えると辻褄が合います。（図 3）任意の三角形は円に内接

しますから。以後点Pが平行四辺形の境界線上にあるときは，このように考えることにします。

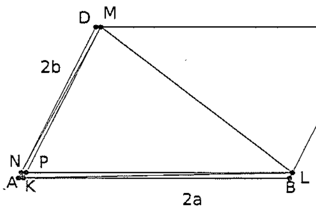

図3

$a=b$ のとき(1)は，

$$(p-q)(p+q-2a)=0$$

ですので，軌跡は平行四辺形ABCDの2本の対角線になることがわかります。

$a>b$ のとき，(1)より軌跡は4頂点A，B，C，Dを通る左右に開いた双曲線になることはわかります。軌跡上にある点をあと2つ見つけようと思います。

> 定理1　図2において，
> $\angle LMN+\angle LKN=180°$
> $\Longleftrightarrow \angle APB+\angle CPD=180°$

点Pをベクトル $\overrightarrow{AD}$ にそって平行移動した点をP′とすると(図4)，方べきの定理およびその逆から，

四角形KLMNが円に内接する

$\Longleftrightarrow$ 四角形PCP′Dが円に内接する

となることからわかります。

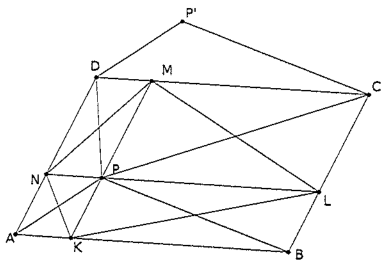

図4

定理1とトレミーの定理より次の系が成り立ちます。

> 系　平行四辺形ABCD内の点Pについて，
> $\angle APB+\angle CPD=180°$
> $\Longleftrightarrow PA\cdot PC+PB\cdot PD=AB\cdot AD$

定理1より，軌跡上にある点を見つけるためには，

$$\angle APB+\angle CPD=180°$$

となる点Pを見つければ良いことになります。これは例えば，平行四辺形ABCDの(長い方の)辺AB，CDをそれぞれ直径とする2円の交点として求められます。交点の1つをQとすると円周角の定理より，

$$\angle AQB=90°,\quad \angle CQD=90°$$

となるからです。

以上をまとめます。四角形KLMNが円に内接する四角形となる点Pの軌跡は，

$a=b$ のとき，平行四辺形ABCDの2本の対角線になり，(図5)

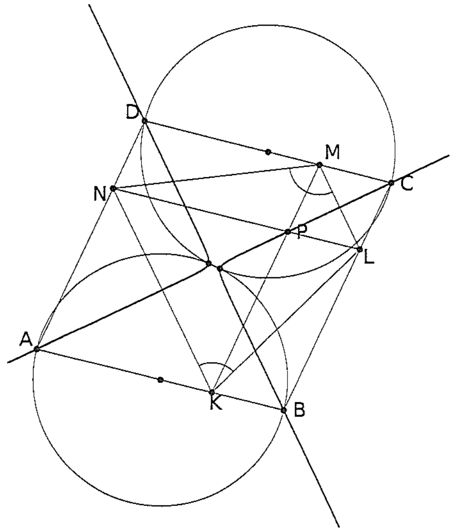

図5

$a>b$ のとき，平行四辺形ABCDの4頂点A，B，C，Dと，平行四辺形の(長い方の)辺AB，CDをそれぞれ直径とする2円の交点を通る双曲線になります。(図6)

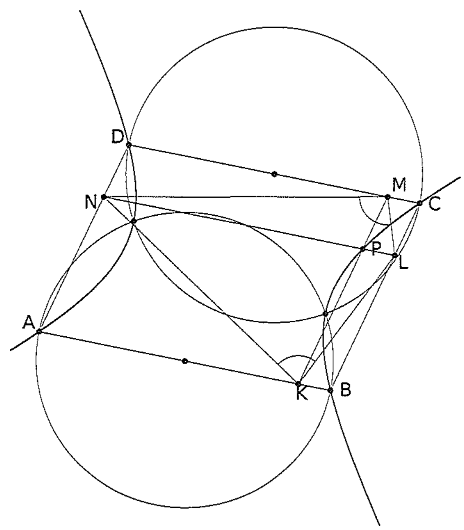

図6

§4. 円に外接する四角形について

円に外接する四角形となる点Pの軌跡については，(1)に相当するような簡単な p，q の方程式にはなりそうにありません。(ご存知でしたら，どなたかお教えください。) ただ，トレミーの定理に相当するような定理を見つけましたので，ここで述べておきます。

円に外接する四角形についての次の定理は有名です。

> 定理2　四角形KLMNが円に外接するための必要十分条件は，
>
> $$\mathrm{LM}+\mathrm{NK}=\mathrm{KL}+\mathrm{MN}$$
>
> である。

ここで述べたいのは次の定理です。

> 定理3　四角形KLMNにおいて，2本の対角線の交点をP，対角線のなす角を $\theta=\angle\mathrm{LPM}$ とするとき，四角形KLMNが円に外接するための必要十分条件は，
>
> $$\mathrm{LM}\cdot\mathrm{NK}-\mathrm{KL}\cdot\mathrm{MN}=\mathrm{LN}\cdot\mathrm{KM}\cdot\cos\theta$$
>
> である。

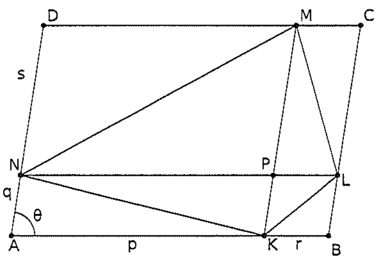

図7

(証明)　以前と同じように(図7)のように考えます。余弦定理より，

$$\mathrm{LM}^2=r^2+s^2-2rs\cos\theta$$
$$\mathrm{NK}^2=p^2+q^2-2pq\cos\theta$$
$$\mathrm{KL}^2=r^2+q^2+2rq\cos\theta$$
$$\mathrm{MN}^2=p^2+s^2+2ps\cos\theta$$

また定理2より，

$$(\mathrm{LM}+\mathrm{NK})^2=(\mathrm{KL}+\mathrm{MN})^2$$
$$\mathrm{LM}^2+\mathrm{NK}^2+2\cdot\mathrm{LM}\cdot\mathrm{NK}$$
$$=\mathrm{KL}^2+\mathrm{MN}^2+2\cdot\mathrm{KL}\cdot\mathrm{MN}$$

上の式を代入して，

$$p^2+q^2+r^2+s^2-2(pq+rs)\cos\theta+2\cdot\mathrm{LM}\cdot\mathrm{NK}$$
$$=p^2+q^2+r^2+s^2+2(ps+rq)\cos\theta+2\cdot\mathrm{KL}\cdot\mathrm{MN}$$
$$2(\mathrm{LM}\cdot\mathrm{NK}-\mathrm{KL}\cdot\mathrm{MN})=2(pq+ps+rq+rs)\cos\theta$$
$$\mathrm{LM}\cdot\mathrm{NK}-\mathrm{KL}\cdot\mathrm{MN}=(p+r)(q+s)\cos\theta$$
$$\therefore\quad \mathrm{LM}\cdot\mathrm{NK}-\mathrm{KL}\cdot\mathrm{MN}=\mathrm{LN}\cdot\mathrm{KM}\cdot\cos\theta$$

定理2の逆を使えば，定理3の逆も成り立つことがわかります。

§5. おわりに

私がここで述べたようなことは，過去どなたかが既に見つけておられることだとは思います。しかし，私の中では新発見の連続でした。楽しい日々を過ごしました。再発見でもいい，自分で発見することの何と楽しいことか。こういう喜びを生徒たちにも味あわせてやれる授業ができたらなあと常に思っています。

そして，GeoGebraとかMaximaとかのコンピュータソフトの助けを借りながら研究を進めました。頭の中ではそうなると理論的には分かっていることでも，視覚的に動きを伴って確認できれば，さらなる理解を深める助けになりました。興味，適正のある生徒にはこのような体験をさせることはとても重要なことだと確信します。テクノロジーを使う努力を，キーを素早く押すという努力だけに向けさせるのはもったいないと思います。

(本稿の図はすべて，GeoGebraで出力したものです。)

(広島県　黒瀬高等学校)