行列のスペクトル分解とそれに由来する大学入試問題

杉本（すぎもと）　幸司（こうじ）

§1. はじめに

まずは次のような問題を考えてみよう。

【問題】 2次正方行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，A^n（n は正の整数）を求めなさい。

【解答1】行列 P を $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ で定義する。このとき，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ①$$

となる。両辺を n 乗すれば，

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

となるので，

$$A^n=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & -1+3^n \\ -1+3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$$

が得られる。■

解答1は，大学の線型代数で学ぶ「行列の対角化」を応用した解法である。なお，①式において右辺の行列における対角成分1と3は，行列 A の「固有値」である。

一方，次のような解法をご覧になったことがあるだろうか。

【解答2】行列 P，Q を，

$$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で定義する。このとき次のことが確かめられる。

(1) $P^2=P$，$Q^2=Q$

(2) $PQ=O$，$QP=O$

$\left[O \text{ は零行列，} O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

(3) $A=P+3Q$

[容易にできるので各自確認願います。]

(1)(2)(3)より，

$$A^2=(P+3Q)(P+3Q)$$
$$=P^2+3PQ+3QP+3^2Q^2$$
$$=P+3^2Q$$
$$A^3=(P+3^2Q)(P+3Q)$$
$$=P^2+3PQ+3^2QP+3^3Q^2$$
$$=P+3^3Q$$

(以下，帰納的に)

$$A^n=P+3^nQ$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+3^n\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & -1+3^n \\ -1+3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$$

となる。■

解答2はやはり線型代数でよく知られている「行列のスペクトル分解」を応用した解法である。(1)(2)のような性質をもつ行列 P，Q を「射影行列」といい，(3)のように行列を射影行列の1次結合で表すことを「行列のスペクトル分解」という。なお，

(4) (3)の分解における射影行列の係数1と3は，行列 A の「固有値」になっている。

(5) $P+Q=E$ $\left[E \text{ は単位行列，} E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$ となっている。

ことにも注意されたい。

§2. 行列のスペクトル分解

この節では行列のスペクトル分解に関する一般的な事項を簡単にまとめておくことにする。なお，ここで考える行列はすべて複素数を成分とする正方行列とする。

定義2．1　n 次正方行列 P が射影行列であるとは

$$P^2=P\ (冪等)$$

であることをいう。

定義2．2　n 次正方行列 A に対してその相異なる固有値を $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_r$ とする。各 $i\ (1\leqq i\leqq r)$ に対して

$$E(\lambda_i)=\{x\,|\,Ax=\lambda_i x\}$$

とおき，A の λ_i に対する固有空間という。

さて，いま行列 A が条件

$$(*)\ E(\lambda_1)\oplus\cdots\cdots\oplus E(\lambda_r)=C^n$$

を満たしているとする。この条件は，A が対角化可能であることを意味している。たとえば $r=n$ のときはこの条件を満たすことが知られている。特に2次正方行列が相異なる2つの固有値をもてば，条件（＊）を満たす。

この条件（＊）より，任意のベクトル $x\in C^n$ は

$$x=x_1+\cdots\cdots+x_r\quad (x_i\in E(\lambda_i))$$

の形に分解でき，この分解は一通りしかない。そこで，写像 $P_i\ (1\leqq i\leqq r)$ を

$$P_i x=x_i$$

で定義する。この写像が線形であることは容易にわかる。実はこの写像は射影行列で表され，次の定理が成り立つ。

定理2．3　【行列のスペクトル分解定理】n 次正方行列 A とその相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_r$ が条件（＊）を満たすとする。対応する射影行列を $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_r$ とする。このとき，次の式が成り立つ。

(1) $P_1+P_2+\cdots\cdots+P_r=E$（$E$ は単位行列）

(2) $P_i^2=P_i$

(3) $P_jP_i=O\ (i\neq j)$（O は零行列）

(4) $A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\cdots\cdots+\lambda_rP_r$

[(4)を，行列 A のスペクトル分解という。]

【定理2．3の証明の概要】　(1)は，P_i の定義から，

$$\begin{aligned}x&=P_1x+\cdots+P_rx\\&=(P_1+\cdots+P_r)x\end{aligned}$$

が任意のベクトル $x\in C^n$ について成り立つ。

(2)と(3)は，上の式の x のところに P_ix を代入すると，

$$P_ix=P_1P_ix+\cdots+P_i^2x+\cdots+P_rP_ix$$

である。一方，

$$P_ix=0+\cdots+P_ix+\cdots+0$$

は自明の分解であるから分解の一意性より

$$P_i^2x=P_ix,\quad P_jP_ix=0\ (i\neq j)$$

が任意のベクトル $x\in C^n$ について成り立つ。

(4)は，任意のベクトル $x\in C^n$ について，

$$\begin{aligned}Ax&=A(P_1+\cdots\cdots+P_r)x\\&=AP_1x+\cdots\cdots+AP_rx\end{aligned}$$

である。ところが $P_ix\in E(\lambda_i)$ であるので，

$$AP_ix=\lambda_iP_ix$$

となる。したがって，

$$Ax=\lambda_1P_1x+\cdots\cdots+\lambda_rP_rx$$

が任意のベクトル $x\in C^n$ について成り立つ。■

要するにある条件を満たす行列に対して射影行列と呼ばれるいくつかの行列があって，その行列を

（固有値）×（射影行列）の和

の形に表すことができる。そのように表すことを行列のスペクトル分解というのである。

参考までに，この射影行列は次のようにして求めることができることも知られている。

定理2．4　n 次正方行列 A とその相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ が条件（＊）を満たすとする。対応する射影行列を $P_1, P_2, \cdots, P_r$ とする。このとき，次の式が成り立つ。

(1) 各射影行列 $P_i\ (1\leqq i\leqq r)$ は

$$P_i=\frac{(\lambda_1E-A)\cdots\overset{i}{\vee}\cdots(\lambda_rE-A)}{(\lambda_1-\lambda_i)\cdots\overset{i}{\vee}\cdots(\lambda_r-\lambda_i)}$$

と表される。ここで，$\overset{i}{\vee}$ とは i 番目の項を除くことを意味する。

(2) $P_iA=AP_i\ (1\leqq i\leqq r)$

【証明】　省略。■

この節に関しては，詳しいことは参考文献〔1〕などの線型代数の本を参照していただきたい。

最後に行列の n 乗を求める問題を解いてみよう。数研出版発行「数学C」29ページの練習28(2)の問題を，行列の対角化を用いた方法ではなく，行列のスペクトル分解を用いて解いてみる。

【問題】　次の行列 A に対し，A^n を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -6 & 6\end{pmatrix}$$

【解答】 (1) まず，行列Aの固有値を求める。

$$\det(tE-A)=\begin{vmatrix} t+1 & -2 \\ 6 & t-6 \end{vmatrix}$$
$$=(t+1)(t-6)+12$$
$$=t^2-5t+6$$
$$=(t-3)(t-2)$$

であるから，相異なる固有値は $\lambda_1=3$ および $\lambda_2=2$ である。

(注意１) 相異なる固有値が２つあるので条件(＊)を満たしている。

(2) 次に各固有値に対応する射影行列を求める。定理2. 4より，

$$P_1=\frac{\lambda_2 E-A}{\lambda_2-\lambda_1}$$
$$=\frac{1}{2-3}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$
$$P_2=\frac{\lambda_1 E-A}{\lambda_1-\lambda_2}$$
$$=\frac{1}{3-2}\left\{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

である。

(注意２) P_2 は $P_1+P_2=E$ から求めた方が早い。

(3) したがって，A のスペクトル分解は

$$A=3P_1+2P_2$$

となり，

$$A^n=3^nP_1+2^nP_2$$
$$=3^n\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -3^{n+1}+2^{n+2} & 2\cdot 3^n-2^{n+1} \\ -2\cdot 3^{n+1}+3\cdot 2^{n+1} & 4\cdot 3^n-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$$

が得られる。■

§3. 大学入試問題の例

行列のスペクトル分解に由来する大学入試問題を見てみよう。

【問題１】 $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $P^2=P$，$Q^2=Q$，$PQ=QP=O$ を証明せよ。

(2) $A=2P+5Q$ とすると，$A^4=2^4P+5^4Q$ となることを証明せよ。 〔1986 中部大〕

【解説】 (1)は，PとQが射影行列になっていることを意味している。(2)は，$A=2P+5Q$ が行列Aのスペクトル分解になっていて，それを用いて証明する。

【略解】 (1) 単なる計算であるので省略。

(2) $A^2=(2P+5Q)(2P+5Q)$
$$=2^2P^2+2\times 5PQ+5\times 2QP+5^2Q^2$$
$$=2^2P+5^2Q$$

同様にして $A^3=2^3P+5^3Q$ となり，同様にして $A^4=2^4P+5^4Q$ が得られる。■

【問題２】 以下の行列について問いに答えよ。

$A=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b & -b \\ b-1 & 1-b \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(1) A^2，B^2 および BA を計算せよ。

(2) $C=tA+B$ でかつ $AB=O$ となるような t，a，b の値を求めよ。

(3) nが正の整数のとき，C^n を求めよ。 〔1991 法政大〕

【解説】 (1)は，実際に計算してみると $A^2=A$, $B^2=B$, $BA=O$ になっている。(2)では，AとBが射影行列となるように定数 a，b を決めている。そして，$C=tA+B$ が行列Cのスペクトル分解になっている。定数 t と 1 がCの固有値である。

【略解】 (1) 実際に計算する。

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a^2+a(1-a) & a(1-a)+(1-a)^2 \\ a^2+a(1-a) & a(1-a)+(1-a)^2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$

他も同様に計算すればよいので省略する。

答 $A^2=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$，$B^2=\begin{pmatrix} b & -b \\ b-1 & 1-b \end{pmatrix}$，

$BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $AB=O$ より

$$\begin{pmatrix} a+b-1 & -a-b+1 \\ a+b-1 & -a-b+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$a+b-1=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

が得られる。

また，$C=tA+B$ より

$$\begin{pmatrix} ta+b & t(1-a)-b \\ ta+b-1 & t(1-a)+1-b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$ta+b=2 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

$$t(1-a)-b=2 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

が得られる。①〜③を解いて，

答　$t=4,\ a=\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{2}{3}$

(3)　(1)より $A^2=A,\ B^2=B,\ BA=O$ であり，(2)より $AB=O$ である。

$C=4A+B$ であるから，

$$\begin{aligned} C^n &= 4^nA+B \\ &= 4^n\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n+2 & 2\times4^n-2\\ 4^n-1 & 2\times4^n+1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

答　$C^n=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n+2 & 2\times4^n-2\\ 4^n-1 & 2\times4^n+1\end{pmatrix}$　■

【問題３】　以下の問いに答えよ。

(1)　実数 a に対し，２次の正方行列 $A,\ P,\ Q$ が５つの条件

$$A=aP+(a+1)Q,\ P^2=P,\ Q^2=Q,$$
$$PQ=O,\quad QP=O$$

を満たすとする。ただし $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ である。

　このとき，$(P+Q)A=A$ が成り立つことを示せ。

(2)　a は正の数として，行列 $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & a+1\end{pmatrix}$ を考える。この A に対し，(1)の５つの条件をすべて満たす行列 $P,\ Q$ を求めよ。

(3)　n を２以上の整数とし，$2\leqq k\leqq n$ を満たす整数 k に対して $A_k=\begin{pmatrix}k & 0\\ 1 & k+1\end{pmatrix}$ とおく。

行列の積 $A_nA_{n-1}A_{n-2}\cdots A_2$ を求めよ。

〔2007 東京大〕

【解説】　(1)は，後半の４条件が $P,\ Q$ が射影行列になっていて，最初の条件 $A=aP+(a+1)Q$ が A のスペクトル分解になっていることを示唆している。したがって定理2．3(1)より $P+Q=E$ であることがわかる。

【略解】　(1)　$(P+Q)A$

$$\begin{aligned} &=(P+Q)\{aP+(a+1)Q\} \\ &=aP^2+(a+1)PQ+aQP+(a+1)Q^2 \\ &=aP+(a+1)Q \\ &=A \end{aligned}$$

(2)　$\det A=a(a+1)\neq0$（a は正の数であるから）より，A は逆行列 A^{-1} をもつ。

$(P+Q)A=A$ の両辺に右から A^{-1} をかけて $P+Q=E$ が得られる。$A=aP+(a+1)Q$ と連立させて解くと，

答　$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

(3)　$A_k=kP+(k+1)Q$ と表せるので，

$$\begin{aligned} &A_nA_{n-1}A_{n-2}\cdots A_2 \\ &=\{nP+(n+1)Q\}\cdot\{(n-1)P+nQ\} \\ &\quad\cdot\{(n-2)P+(n-1)Q\}\cdot\cdots \\ &\quad\cdots\cdot(2P+3Q) \\ &=n(n-1)(n-2)\cdots2P \\ &\quad+(n+1)n(n-1)\cdots3Q \\ &=n!\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\frac{(n+1)!}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix}n! & 0\\ -n!+\dfrac{(n+1)!}{2} & \dfrac{(n+1)!}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

答　$\begin{pmatrix}n! & 0\\ -n!+\dfrac{(n+1)!}{2} & \dfrac{(n+1)!}{2}\end{pmatrix}$　■

§４．おわりに

行列のスペクトル分野に関する基本的事項とそれに由来する大学入試問題を取り上げてみた。行列のスペクトル分野という限られた話題ではあったが，先人たちの研ぎ澄まされた豊かな発想を鑑賞できたのではないかと思う。

また，大学入試問題の背景になっている理論を知ることによって，高い見地から問題を理解することができる。高校数学の教材をちょっと高い見地，異なった視点から見直すことによって，より一層広く，深く観ることができ，数学の面白さを生徒に教えることにもつながるのではないかと思われる。

《参考文献》

〔１〕 笠原晧司「行列の構造」現代応用数学の基礎　日本評論社 1994

（北海道　札幌静修高等学校）