正接の値と黄金数

木村（きむら） 嘉宏（よしひろ）

§1. はじめに

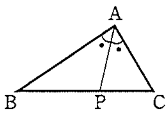
高等学校数学Aにおいて，平面図形のはじめに次の定理が出てくる。

> △ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点 P は辺 BC を AB：AC に内分する。

すなわち，図において

BP：PC＝AB：AC

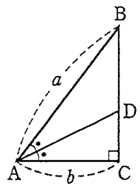
である。



これを用いて，正接の値を計算してみよう。

§2. 半角の正接の値

図のような直角三角形 ABC について，∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とすると



$$BC=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$BD:DC=a:b$$

であるから

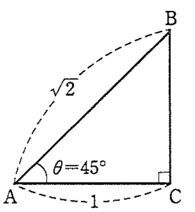
$$DC=\frac{b}{a+b}\times\sqrt{a^2-b^2}=\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$$ であり，

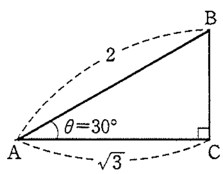
∠BAC＝θ とおくと

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}}{b}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$$ である。

例えば，$\theta=45^\circ$ の直角二等辺三角形から

$$\tan 22.5^\circ=\frac{\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$



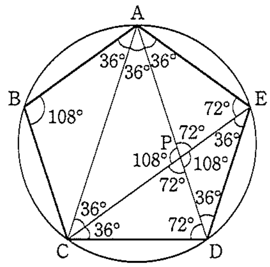


また，$\theta=30^\circ$ の直角三角形から

$$\tan 15^\circ=\frac{\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$ を得る。

§3. 正五角形から取り出せる 2 つの直角三角形

一辺の長さが 2 の正五角形に図のように対角線を引く。



辺と対角線がなす角は図のとおりであり，

PD＝x とおくと

$$AC=AD=x+2$$

△ACD と △CDP は互いに相似な二等辺三角形であり，AC：CD＝CD：DP であるから

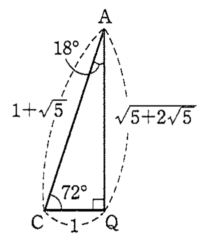
$(x+2):2=2:x$　　これより　$x^2+2x-4=0$

$x>0$ であるから　$x=-1+\sqrt{5}$

したがって，

$$AC=-1+\sqrt{5}+2$$
$$=1+\sqrt{5}$$ である。

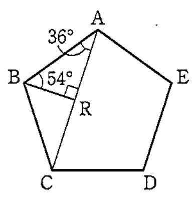
辺 CD の中点を Q とすると，図のような直角三角形 ACQ を得る。



このとき，三平方の定理より

$AQ=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$　である。

次に，対角線 AC の中点を R とすると，△ABR は直角三角形であり，

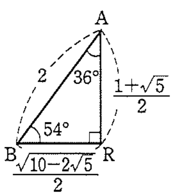


$$\angle ABR=54^\circ$$

$$AR=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

三平方の定理より

$$BR=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$



以上より，図のような直角三角形 ABR を得る。

§4. 正接の値の計算

§3 の直角三角形より，次の正接の値を得る。

$$\tan 72^\circ=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$\tan 18^\circ=\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5}$$

$$\tan 54^\circ=\frac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{80+32\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}$$

$$\tan 36^\circ=\frac{\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{80-32\sqrt{5}}}{4}=\frac{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

また，§2 の方法を用いると

$$\tan 9^\circ=\frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2-(\sqrt{5+2\sqrt{5}})^2}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\{(1+\sqrt{5})+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\}\{(1+\sqrt{5})-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\}}$$

$$=1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$\tan 27^\circ=\frac{\sqrt{2^2-\left(\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)^2}}{2+\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}}}{\dfrac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}}=\frac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{5})(4-\sqrt{10-2\sqrt{5}})}{(4+\sqrt{10-2\sqrt{5}})(4-\sqrt{10-2\sqrt{5}})}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{5})(4-\sqrt{10-2\sqrt{5}})}{6+2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})(4-\sqrt{10-2\sqrt{5}})}{(6+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}$$

$$=\frac{(-4+4\sqrt{5})(4-\sqrt{10-2\sqrt{5}})}{16}$$

$$=\frac{4(-4+4\sqrt{5})-(-4+4\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

$$=-1+\sqrt{5}-\frac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\sqrt{5}-1-\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\sqrt{5}-1-\frac{\sqrt{80-32\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\sqrt{5}-1-\frac{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

さらに，$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$ より

$$\tan 81^\circ=\frac{1}{\tan 9^\circ}=\frac{1}{1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\{(1+\sqrt{5})-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\}\{(1+\sqrt{5})+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\}}$$

$$=\sqrt{5}+1+\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$\tan 63^\circ=\frac{1}{\tan 27^\circ}=\frac{1}{\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\{(\sqrt{5}-1)-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\}\{(\sqrt{5}-1)+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\}}$$

$$=\sqrt{5}-1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$\tan 45^\circ=1$ は自明であるから，次のようにまとめることができる。

$$\tan 9^\circ=\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$\tan 18^\circ=\frac{\sqrt{5}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5}$$

$$\tan 27^\circ=\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$\tan 36^\circ=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$\tan 45^\circ=1$$

$$\tan 54^\circ=\frac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}$$

$$\tan 63^\circ=\sqrt{5}-1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$\tan 72° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$

$\tan 81° = \sqrt{5}+1+\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

§5. 黄金数との関わり

$1:\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ を黄金比，$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ を黄金数と呼ぶことはよく知られている。

§4 でまとめた正接の値には，繰り返し黄金数が現れる。

これらの値は，tan 36°，tan 72° と黄金数を組み合わせて表すことができる。

$$\tan 36° = \sqrt{5-2\sqrt{5}},\ \tan 72° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ とおくと $\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

であるから

$$\tan 9° = 2\phi - \tan 72°$$

$$\tan 18° = \frac{\sqrt{5}}{5}\tan 36°$$

$$\tan 27° = \frac{2}{\phi} - \tan 36°$$

$$\tan 54° = \frac{\sqrt{5}}{5}\tan 72°$$

$$\tan 63° = \frac{2}{\phi} + \tan 36°$$

$$\tan 81° = 2\phi + \tan 72°$$

である。

なお，§3 で得た直角三角形から

$$\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\phi}{2}$$

であり，また

$$\tan 72° = \frac{1}{\tan 18°} = \frac{\sqrt{5}}{\tan 36°}$$

であるから，これらの値は，cos 36° と tan 36° の 2 つの値で表すことも可能である。

（京都府立網野高等学校間人分校）