「たかが三角形，されど三角形」その２

八巻（やまき）　専文（ひろふみ）

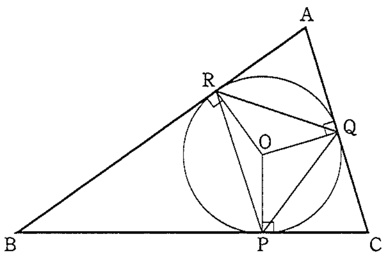
§0. はじめに

数研通信 No.62 では，「たかが三角形，されど三角形」において，三角形の角の二等分線でつくる三角形と対辺への垂線でつくる三角形について，もとの三角形との面積比について考察した。

今回は，前半で三角形の３辺の積と和について考察した。後半では，三角形の内接円の３接点でつくる三角形ともとの三角形の面積について考察した。いずれもとてもきれいな関係式が成り立つことを発見した。

§1. 三角形の３辺の和と積

三角形の３辺の積 abc と和 $(a+b+c)$ の比について考察してみた。



△ABC において面積は

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$$

一方　$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

よって　$\frac{abc}{4R}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

$\therefore\ abc:(a+b+c)=2rR:1$

$$\boxed{\frac{\text{3辺の積}}{\text{3辺の和}}=2rR=(\text{内接円の半径})\times(\text{外接円の直径})}$$

３辺の積と和の比がとてもきれいな形になった。

３辺の長さがわかっていれば S と r はすぐに求められる。

R はこの式に代入すればすぐに求められる。

三角形の内接円の半径を r，外接円の半径を R としたときの３辺の積と和の比がきれいな形になり大変不思議で驚いた。

§2. 三角形とその内接円の３接点でできる三角形

三角形 ABC においてその内接円と３辺との接点を P，Q，R としたとき，△ABC と △PQR との面積の比について考察した。

上図において，四角形AROQは円に内接するから，

$\angle \mathrm{ROQ}=180^\circ-\angle \mathrm{A}$

$$\triangle \mathrm{OQR}=\frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}\cdot\sin\angle \mathrm{ROQ}$$
$$=\frac{1}{2}r^2\sin A=\frac{1}{2}r^2\frac{a}{2R}=\frac{ar^2}{4R}$$

同様にして，

$$\triangle \mathrm{OPR}=\frac{br^2}{4R},\quad \triangle \mathrm{OPQ}=\frac{cr^2}{4R}$$

よって，

$$\triangle \mathrm{PQR}=\triangle \mathrm{OQR}+\triangle \mathrm{OPR}+\triangle \mathrm{OPQ}$$
$$=\frac{ar^2}{4R}+\frac{br^2}{4R}+\frac{cr^2}{4R}$$
$$=\frac{r^2}{4R}(a+b+c)=\frac{r}{2R}\cdot\frac{r}{2}(a+b+c)$$
$$=\frac{r}{2R}\triangle \mathrm{ABC}$$

$$\boxed{\frac{\triangle \mathrm{PQR}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\frac{r}{2R}=\frac{\text{内接円の半径}}{\text{外接円の直径}}}$$

これもとても美しい数式である。

§3. 感想

三角形の面積を R と r で表し授業で教えたその夜，なんと夢のなかで２式がそれぞれ動いていました。なんと２式は一緒になりたがっていました。そのとき一緒にさせたくて，夜中の３時に起き２式を一緒にしたところ，積と和のきれいな数式ができました。その日の授業で披露したところ生徒の驚きの声と共になんと拍手をしてくれました。

（山梨県　甲陵高等学校）