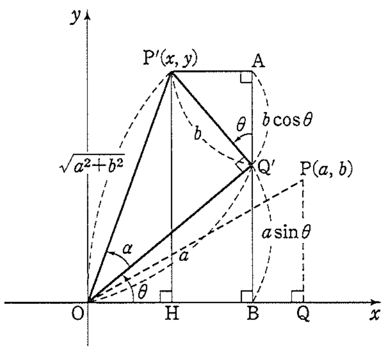
三角関数の合成が表しているもの

～$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$ の意味を考える～

大関（おおせき）　浩二（こうじ）

§1．はじめに

三角関数の合成を図形的な意味から説明する。



$r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{r}$ とすると

$$\mathrm{AB}=\mathrm{Q'B}+\mathrm{AQ'}=a\sin\theta+b\cos\theta$$

$$\mathrm{P'H}=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)=r\sin(\theta+\alpha)$$

AB＝P′H であるから

$$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$$

点P′は点Pを原点Oの周りに θ だけ回転移動した点で，最初に，r と α を見つけるためにとる点 P(a，b) の位置は $\theta=0$ の場合の点P′なのである。

§2．半径 r の円を利用して（見よ作戦）

媒介変数を θ とすると

$$x=r\cos(\theta+\alpha),\ \ y=r\sin(\theta+\alpha)$$

は，原点Oを中心とし，半径 r の円を表し，合成はこの円の y 座標を表している。

【例題１】

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で関数

$$f(\theta)=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$$

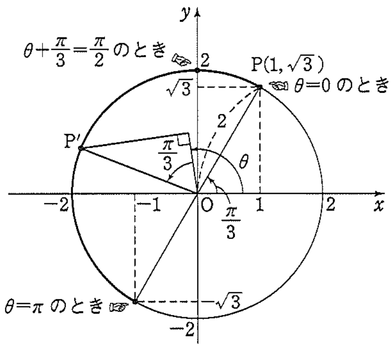
を考える。

(1) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) 方程式 $f(\theta)=1$ を解け。

(3) k を定数とする。方程式 $f(\theta)=k$ が異なる２つの解をもつような k の値の範囲を求めよ。また，このとき，２つの解を θ_1，θ_2 とすると，$\theta_1+\theta_2$ を求めよ。

(1)



$f(\theta)=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ と合成できる。

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから，半径２の円のうち太線の部分を表す。y 座標の最大値は２，最小値は $-\sqrt{3}$

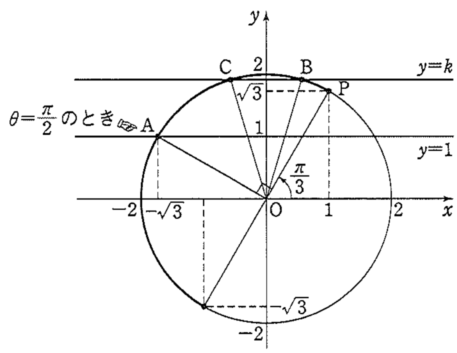
$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ を解くと，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，最大値２をとり，

$\theta=\pi$ のとき，最小値 $-\sqrt{3}$ をとる。

これこそ「見よ作戦」です。

(2)



直線 $y=1$ を引くと点Aで交わる。

$\angle\mathrm{POA}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{2}}$

(3) 直線 $y=k$ と半円が異なる 2 点 B，C で交わるのは，$\boldsymbol{\sqrt{3}\leqq k<2}$ のときである。

また，$\dfrac{1}{2}\left\{\left(\theta_1+\dfrac{\pi}{3}\right)+\left(\theta_2+\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\theta_1+\theta_2=\pi-\frac{2}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

【例題 2】

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で関数

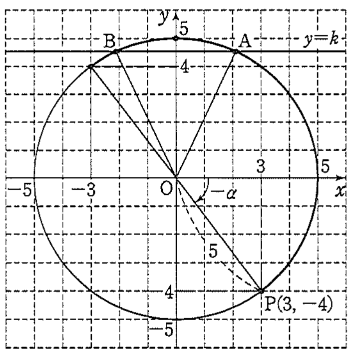
$$f(\theta)=2\cos\theta(3\sin\theta-4\cos\theta)+4$$

を考える。

(1) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) k を定数とする。方程式 $f(\theta)=k$ が異なる 2 つの解をもつような k の値の範囲を求めよ。また，このとき，2 つの解を θ_1，θ_2 とすると，$\cos(\theta_1+\theta_2)$ の値を求めよ。

(1)



$$f(\theta)=6\sin\theta\cos\theta-8\cos^2\theta+4$$
$$=6\cdot\frac{1}{2}\sin2\theta-8\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+4$$
$$=3\sin2\theta-4\cos2\theta=5\sin(2\theta-\alpha)$$

と変形できる。

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$0\leqq2\theta\leqq\pi$ であるから，半径 5 の円のうち太線の部分を表す。y 座標の最大値は 5，最小値は -4

$2\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ を解くと，$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}$ であるから

$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}}$ のとき，**最大値 5** をとり，

$\boldsymbol{\theta=0}$ のとき，**最小値 −4** をとる。

(2) 直線 $y=k$ と半円が異なる 2 点 A，B で交わるのは，$\boldsymbol{4\leqq k<5}$ のときである。

方程式 $f(\theta)=k$ の 2 つの解が θ_1，θ_2 であるから

$$\frac{(2\theta_1-\alpha)+(2\theta_2-\alpha)}{2}=\frac{\pi}{2}\quad\therefore\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}+\alpha$$

$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=\boldsymbol{-\frac{4}{5}}$$

【例題 3】

関数 $y=3\cos\theta+4\sin\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ について

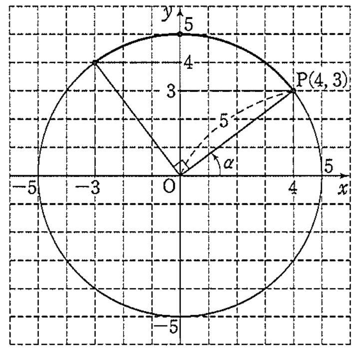
(1) y の最大値と最小値を求めよ。

(2) y が最大値をとるときの

$z=3\sin2\theta+4\cos2\theta$ の値を求めよ。

〔2003 中央大・改題〕

(1)



$y=4\sin\theta+3\cos\theta=5\sin(\theta+\alpha)$ と合成できる。

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから，半径 5 の円のうち太線の部分を表す。y 座標の最大値は 5，最小値は 3

$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha}$ のとき，**最大値 5** をとり，

$\boldsymbol{\theta=0}$ のとき，**最小値 3** をとる。

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき，

$$\sin2\theta=\sin(\pi-2\alpha)=\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$
$$\cos2\theta=\cos(\pi-2\alpha)=-\cos2\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$$
$$=\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25}$$

よって　$z=3\cdot\dfrac{24}{25}+4\cdot\left(-\dfrac{7}{25}\right)=\boldsymbol{\dfrac{44}{25}}$

《参考文献》

〔1〕 Studyaid D.B. 数学　数研出版

(新潟県立新潟江南高等学校)