三角形の重心を通る直線の定理

伊藤　亘央（いとう　のぶお）

§1. はじめに

三角形の重心は中線の交点である。中線は面積を2等分するからという単純な理由で，重心を通る直線は必ずその三角形を2等分するという思い違いをしやすいように思われる。そこで，重心を通る直線が面積を2等分するとは限らないことを実感すると同時に，具体的に重心を通る直線の引き方によって面積差がどのように変化するかを調べたいと思った。

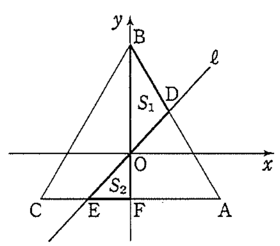
§2. 定理

> 正三角形の重心を通る直線によって，その正三角形が2つの部分に分けられる場合，2つの部分の面積の差が最大になるのは，その直線が正三角形の1辺に平行なときである。

§3. 定理の証明

正三角形ABCを1辺6とし，座標平面上に，$A(3,\ -\sqrt{3})$，$B(0,\ 2\sqrt{3})$，$C(-3,\ -\sqrt{3})$をとり，重心を原点Oとして考える。正三角形ABCを2つの部分に分ける直線を $\ell : y=tx \left(t \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ とする。この設定ですべての正三角形の相似性から一般性を失わない。

ℓ と辺ABとの交点をD,
ℓ と辺ACとの交点をE,
辺ACとy軸との交点をF,
$\triangle$OBDの面積をS_1,
$\triangle$OEFの面積をS_2　とする。



$\triangle$ABCは直線ℓによって，四角形CEDBと三角形ADEの2つの部分に分けられる。

(四角形CEDBの面積)
$$=(\triangle \text{CBFの面積})+(S_1-S_2)$$
(三角形ADEの面積)
$$=(\triangle \text{ABFの面積})-(S_1-S_2)$$

$\triangle \text{CBF} \equiv \triangle \text{ABF}$ から $t \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ の範囲で S_1-S_2 の絶対値が最大になるときの t の値を調べればよい。

$\ell : y=tx$，AB$: y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$　からDのx座標は $\dfrac{2\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}$

Eのx座標は $-\dfrac{\sqrt{3}}{t}$

$$S_1=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}=\frac{6}{t+\sqrt{3}}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{t}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2t}$$

$f(t)=S_1-S_2$ とおく。

$$f(t)=\frac{6}{t+\sqrt{3}}-\frac{3}{2t}=\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{3}t-1)}{2t(t+\sqrt{3})}$$

$t \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ において　$f(t) \geqq 0$ ………（＊）

$$\frac{d}{dt}f(t)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(t-\sqrt{3})(\sqrt{3}t+1)}{t^2(t+3)^2}$$

t	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	…	$\sqrt{3}$	…
$\frac{d}{dt}f(t)$		＋	0	－
$f(t)$		↗		↘

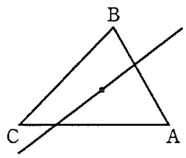
増減表と（＊）より $t \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ の範囲では，$t=\sqrt{3}$ のとき，S_1-S_2 の絶対値は極大かつ最大になる。つまり，直線ℓは傾き$\sqrt{3}$のとき，正三角形ABCが分けられる2つの部分の面積の差を最大にする。これは辺BCに平行なときである。

以上より，正三角形の重心を通る直線によって分けられる，２つの部分の面積の差が最大になるのは，その直線が正三角形の１辺に平行なときである。

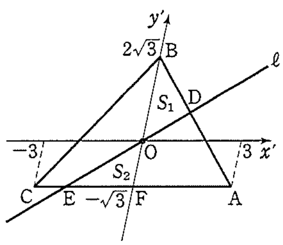
§4. 一般の三角形

以上に述べた定理は，一般の三角形でも成り立つ。

任意に△ABC が与えられたとする。重心を通り，辺 AB，辺 AC と交わる直線 ℓ によって，△ABC が２つの部分に分けられるとする。



座標平面上で考え，適当な座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $(\det M > 0)$ を施し，$x'y'$ 平面上において重心を原点Oとし，A$(3,\ -\sqrt{3})$，B$(0,\ 2\sqrt{3})$，C$(-3,\ -\sqrt{3})$ とする。



先の証明と同様に，点 D，E，F をとり，△OBD の面積を S_1，△OEF の面積を S_2 とする。D，E の x' 座標は各々 $\dfrac{2\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{t}$ であることを用いて，△ABC の面積を１としたときの，S_1，S_2，S_1-S_2 の△ABC に対する面積の割合は

$$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\Big/3\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9(t+\sqrt{3})}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{t}\Big/3\right)=\frac{\sqrt{3}}{18t}$$

$$S_1-S_2=\frac{2\sqrt{3}}{9(t+\sqrt{3})}-\frac{\sqrt{3}}{18t}=\frac{\sqrt{3}t-1}{6t(t+\sqrt{3})}$$

この S_1-S_2 は先の証明における $f(t)$ の $\dfrac{1}{9\sqrt{3}}$ 倍に等しい。したがって，先の証明と同様に，ℓ が辺 BC に平行なときに，四角形 CEDB と三角形 ADE の面積の差が最大になることがわかる。

重心を通る直線が，辺 AC，辺 BC と交わる場合も，辺 AB，辺 BC と交わる場合も，各々適当な座標変換を施すことによって，同様に証明できる。

以上より，次の定理が得られる。

『三角形の重心を通る直線によって，その三角形が２つの部分に分けられる場合，２つの部分の面積の差が最大になるのは，その直線が三角形の１つの辺に平行なときである。』

因みに，このとき台形と三角形に分けられるが，面積比が５：４になることは容易にわかる。

《参考文献》

〔１〕 伊藤亘央『独創問題集』
那須高原海城 数学科 研究集録 第１集

（栃木県　那須高原海城中学校高等学校）